

Primeri zadataka za prijemni ispit  
iz matematike i informatike  
za studente bioinformatike  
(V1.1 sa ispravkama i rešenjima)

dr Dragan Mašulović, dr Vladimir Kurbalija  
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu  
Departman za matematiku i informatiku  
Trg Dositeja Obradovića 3, 21000 Novi Sad  
email: {dragan.masulovic,vladimir.kurbalija}@dmi.uns.ac.rs

13. maj 2024.

## Sadržaj

|          |                            |           |
|----------|----------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Logika</b>              | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Kombinatorika</b>       | <b>8</b>  |
| <b>3</b> | <b>Brojevi i jednačine</b> | <b>10</b> |
| <b>4</b> | <b>Trigonometrija</b>      | <b>13</b> |
| <b>5</b> | <b>Realne funkcije</b>     | <b>16</b> |
| <b>6</b> | <b>Programiranje</b>       | <b>19</b> |
| <b>7</b> | <b>Rešenja</b>             | <b>21</b> |

# Predgovor

Prijemni ispit za upis na studijski program Osnovne studije Bioinformatike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu se sastoji iz dva dela:

- I. Deo iz biologije (koji nosi 30 poena), i
- II. Deo iz matematike i informatike (koji nosi 30 poena).

Tekst koji je pred vama sadrži primere zadataka za deo prijemnog ispita iz matematike i informatike. Građivo koje dolazi u obzir za prijemni ispit iz ovog dela obuhvata sledeće teme:

- *Logika*: Logički veznici, iskazne formule, tautologije; kvantifikatori.
- *Elementi kombinatorike*: prebrojavanje nizova simbola (varijacije, permutacije); prebrojavanje delegacija (kombinacije bez ponavljanja); princip uključenja-isključenja za dva i tri svojstva.
- *Brojevi*: celi, racionalni i realni brojevi; procentni račun; apsolutna vrednost realnog broja; približne vrednosti; razmere i proporcije.
- *Linearne jednačine i nejednačine*: linearne jednačine sa jednom promenljivom; linearne nejednačine sa jednom promenljivom; sistemi dve i tri linearne jednačine sa dve, odnosno, tri nepoznate.
- *Trigonometrija pravog ugla*: osnovne trigonometrijske funkcije oštrog ugla i njihove osnovne osobine, sinusna i kosinusna teorema.
- *Realne funkcije i njihovi grafici*: funkcija  $y = ax + b$ ; očitavanje vrednosti komplikovanije realne funkcije sa njenog grafika; kvadratna jednačina i kvadratna funkcija.
- *Programiranje*: Struktura i delovi programa, prosti tipovi podataka, unos i ispis, naredba dodele, izrazi, uslovne naredbe, petlje, funkcije/procedure/metodi, nizovi/liste.

Na delu prijemnog ispita koji se odnosi na matematiku i informatiku radi se šest zadataka, ali se boduje pet najbolje urađenih zadataka. Svaki zadatak nosi po 6 poena.

## Napomena:

1. Prilikom izrade zadataka iz matematike *nije dozvoljena* upotreba nikakvih računskih pomagala.
2. Prilikom izrade zadatka iz programiranja može se koristiti programski jezik po izboru.

*Bićemo zahvalni svima koji nam ukažu na bilo kakvu vrstu grešaka u tekstu, od tipografskih do suštinskih!*

Autori

# 1 Logika

**Zadatak 1.1** Jedan mali program ima četiri celobrojne promenljive:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$ . Nakon završetka programa stanje u memoriji računara je izgledalo ovako:

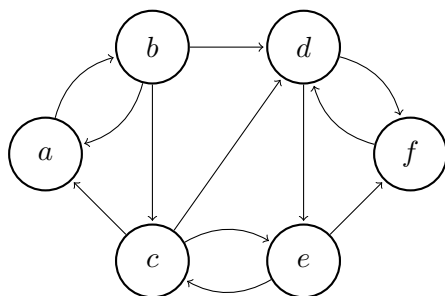
MEMORIJA

|       |    |
|-------|----|
| $a$ : | 6  |
| $b$ : | 9  |
| $c$ : | -3 |
| $d$ : | 0  |

Neka je  $P = \{a, b, c, d\}$  skup promenljivih ovog programa. U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** pored tačnih iskaza, odnosno **NE** pored netačnih iskaza:

| Iskaz   | Iskaz je tačan? |    |
|---|-----------------|----|
| $a + b + c + d = a + b + c$                           | DA              | NE |
| $a > 0 \wedge b > 0$                                  | DA              | NE |
| $c < 0 \vee d < 0$                                    | DA              | NE |
| $(\forall x \in P) x$ je deljiv sa 3                  | DA              | NE |
| $(\exists x \in P) x > 9$                             | DA              | NE |
| $(\forall x \in P)(\forall y \in P) x + y \geq 3$     | DA              | NE |
| $(\forall x \in P)(\exists y \in P) x \cdot y \geq 0$ | DA              | NE |

**Zadatak 1.2** Država Jednosmerija ima šest gradova:  $a, b, c, d, e$  i  $f$ , i svi putevi između gradova su jednosmerni:



Pišemo  $x \rightarrow y$  ako postoji direktan put od grada  $x$  do grada  $y$ . Recimo,  $c \rightarrow a$  jer postoji direktan put od  $c$  do  $a$ , ali *nije*  $a \rightarrow c$  jer ne postoji direktan put od  $a$  do  $c$ . Pored toga, pišemo  $x \rightsquigarrow y$  ako se od grada  $x$  do grada  $y$  može stići direktno ili preko nekih drugih gradova, ali poštujući jednosmerne puteve. Recimo,  $c \rightsquigarrow d$  zato što su spojeni direktnim putem, ali i  $a \rightsquigarrow c$  jer se od  $a$  do  $c$  može stići preko grada  $b$  poštujući jednosmerne puteve.

Neka je  $G = \{a, b, c, d, e, f\}$  skup gradova države Jednosmerije. U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** pored tačnih iskaza, odnosno **NE** pored netačnih iskaza:

| Iskaz  | Iskaz je tačan? |    |
|--|-----------------|----|
| $a \rightarrow d$  | DA              | NE |
| $a \rightsquigarrow e$   | DA              | NE |
| $(\forall x \in G)(\exists y \in G) x \rightarrow y$                                     | DA              | NE |
| $(\forall x \in G)(\exists y \in G)(x \rightarrow y \vee y \rightarrow x)$               | DA              | NE |
| $(\exists x, y, z \in G)(x \rightarrow y \wedge y \rightarrow z \wedge z \rightarrow x)$ | DA              | NE |
| $(\forall x \in G) a \rightsquigarrow x$   | DA              | NE |
| $(\forall x \in G)(\forall y \in G) x \rightsquigarrow y$                                | DA              | NE |

**Zadatak 1.3** Od slova A, C, T i G formiran je sledeći niz:

ACATGCACAAGTAATGGAGTAATGCAGTACATGCAGTAC

U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** pored tačnih iskaza, odnosno **NE** pored netačnih iskaza:

| Iskaz   | Iskaz je tačan? |    |
|---|-----------------|----|
| Za svako pojavljivanje slova A u nizu negde desno od njega se javlja slovo C    | DA              | NE |
| Za svako pojavljivanje slova G u nizu negde levo od njega se javlja slovo T     | DA              | NE |
| Slovo C se javlja u nizu češće nego slovo T                                     | DA              | NE |
| Slovo A je najfrekventnije slovo (tj. javlja se češće nego ostala slova u nizu) | DA              | NE |
| U nizu se javlja kombinacija TGA  | DA              | NE |
| Postoji slovo C u nizu neposredno iza koga se javlja slovo G                    | DA              | NE |
| Neposredno iza svake kombinacije GT uvek sledi slovo A                          | DA              | NE |

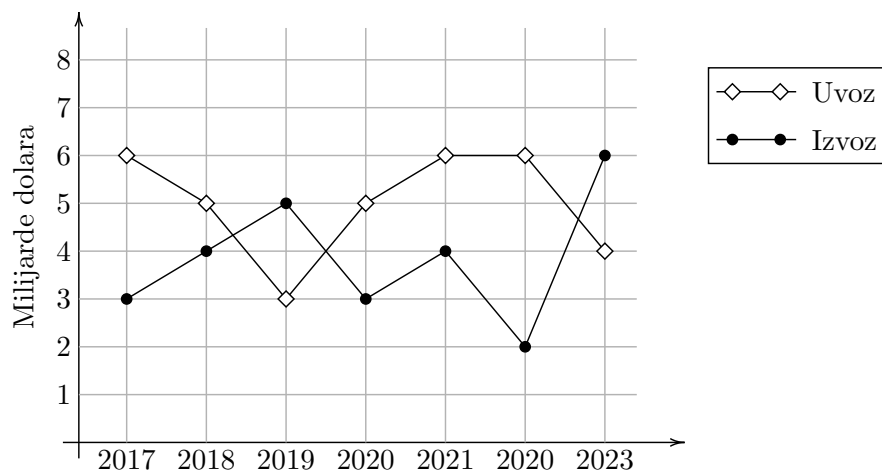
**Zadatak 1.4** Potrošnja struje jednog domaćinstva tokom jedne kalendarske godine je prikazana sledećom tabelom:

| Mesec | Potrošnja (kWh) | Mesec | Potrošnja (kWh) |
|-------|-----------------|-------|-----------------|
| JAN   | 309             | JUL   | 242             |
| FEB   | 291             | AVG   | 257             |
| MAR   | 257             | SEP   | 263             |
| APR   | 212             | OKT   | 271             |
| MAJ   | 229             | NOV   | 285             |
| JUN   | 231             | DEC   | 297             |

U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** pored tačnih iskaza, odnosno **NE** pored netačnih iskaza:

| Iskaz  | Iskaz je tačan? |    |
|--|-----------------|----|
|  | DA              | NE |
| U nekim mesecima je potrošnja prelazila 300 kWh  | DA              | NE |
| Potrošnja nikada nije padala ispod 200 kWh   | DA              | NE |
| Postoje dva meseca u kojima je potrošnja bila ista   | DA              | NE |
| U januaru je potrošnja bila veća od prosečne potrošnje za tu godinu  | DA              | NE |
| Postoji mesec u kome je potrošnja bila manja od medijalne potrošnje za tu godinu                           | DA              | NE |
| Ukupna potrošnja u martu, aprilu i maju je bila veća nego ukupna potrošnja u septembru, oktobru i novembru | DA              | NE |
| Prosečna dnevna potrošnja u januaru je bila veća od prosečne dnevne potrošnje u februaru                   | DA              | NE |

**Zadatak 1.5** Na sledećem grafikonu je prikazan ukupan uvoz i ukupan izvoz države Kukurundije (u milijardama dolara) za period od 2017. do 2023. godine:



Kada država više potroši na uvoz nego što zaradi izvozom, kažemo da ima *spoljnotrgovinski deficit*. Obrnuto, ako država više zaradi izvozom nego što je potrošila na uvoz kažemo da ima *spoljnotrgovinski suficit*. Na primer, ova država je u 2018. godini imala spoljnotrgovinski deficit u visini od 1 milijarde dolara.

U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** pored tačnih iskaza, odnosno **NE** pored netačnih iskaza:

| Iskaz  | Iskaz je tačan? |    |
|--|-----------------|----|
| U poslednjoj godini navedenog perioda je Kukurundija imala najbolji izvozni rezultat od svih godina za koje su nam dati podaci | DA              | NE |
| Postoji godina u posmatranom periodu kada je Kukurundija duplo više novca potrošila na uvoz nego što je zaradila izvozom       | DA              | NE |
| U nekim godinama navedenog perioda je Kukurundija imala spoljnotrgovinski suficit  | DA              | NE |
| U navedenom periodu je država Kukurundija češće imala spoljnotrgovinski suficit nego spoljnotrgovinski deficit                 | DA              | NE |
| U navedenom periodu država Kukurundija nikada nije imala spoljnotrgovinski deficit veći od 5 milijardi dolara                  | DA              | NE |
| U navedenom periodu je država Kukurundija više zaradila od izvoza nego što je potrošila na uvoz                                | DA              | NE |

**Zadatak 1.6** Sudoku je logička igra za jednog igrača koja se igra na tabli  $9 \times 9$  koja je dodatno podeljena na 9 manjih tabli  $3 \times 3$  koje zovemo *kutije*. Cilj igre je da se sva polja table popune ciframa 1, 2, ..., 9 tako da se u svakom redu, svakoj koloni i svakoj kutiji svaka od cifara 1, 2, ..., 9 pojavljuje se tačno jednom. Na primer, u sledećoj tabli:

|       | kol 1 | kol 2    | kol 3 | kol 4 | kol 5    | kol 6 | kol 7 | kol 8 | kol 9 |
|-------|-------|----------|-------|-------|----------|-------|-------|-------|-------|
| red 1 | 4     | 1        | 7     | 6     | 3        | 9     | 8     | 2     | 5     |
| red 2 | 2     | 9        | 6     |       | 1        | 5     | 3     | 4     |       |
| red 3 | 5     | 8        | 3     |       |          |       |       |       |       |
| red 4 | 1     | 2        |       |       |          |       |       |       |       |
| red 5 | 3     |          |       | 4     | 7        |       |       |       | 9     |
| red 6 | 9     | <i>B</i> |       |       |          |       | 1     |       |       |
| red 7 | 8     | 3        |       | 7     | <i>A</i> | 6     |       | 1     |       |
| red 8 | 6     |          |       |       |          |       |       |       |       |
| red 9 | 7     |          |       |       | 2        |       |       |       |       |

popunjeni su prvi red, prva kolona i kutija u gornjem levom uglu.

(a) Popuniti drugi red tabele: 2 9 6  1 5 3 4

(b) Popuniti treći red tabele: 5 8 3

(c) Koju cifru treba upisati u polje označeno sa *A* (red 7, kolona 6)?

(d) Dokazati da u polju koje je označeno sa *B* (red 6, kolona 2) ne može da se nalazi cifra 4.



## 2 Kombinatorika

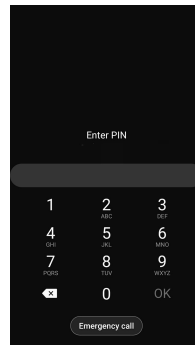
**Zadatak 2.1** Osam drugara su kupili bioskopske karte za film „Openhajmer”. Dobili su sedišta 1, ..., 8 u V redu za projekciju koja počinje u 18h. Na koliko načina ovih osam drugara mogu da se rasporede na sedišta koja su dobili?

**Zadatak 2.2** Osam drugara, među kojima su Javorka i Hrastiša, su kupili karte za bioskop. Dobili su sedišta 3, ..., 10 u IV redu. Na koliko načina ovih osam drugara mogu da se rasporede na sedišta koja su dobili, ali tako da Javorka i Hrastiša:

- (a) sede jedno do drugog?
- (b) *ne sede* jedno do drugog, jer su se nešto sporečkali?

**Zadatak 2.3** Mama je Hrastiši stavila četvorocifreni pin na telefon. Koliko mogućnosti Hrastiša treba da isproba da bi „provalio” pin ako je, dok je virio mami preko ramena, Hrastiša video da su:

- (a) sve cifre različite?
- (b) postoje tačno dve jednake cifre?



**Zadatak 2.4** Hrastiša je provalio mamin četvorocifreni pin, pa mu je mama ovaj put stavila šestocifreni pin na telefon. Koliko mogućnost Hrastiša treba da isproba da bi „provalio” pin ako je, dok je virio mami preko ramena, video da je mama za pin iskoristila tri puta cifru 8, dva puta cifru 6 i jednu cifru 3?

**Zadatak 2.5** Na koliko načina se iz grupe od 5 biologa i 5 informatičara može odabrati delegacija od 3 naučnika u kojoj će obe struke biti zastupljene sa bar jednim predstavnikom?

**Zadatak 2.6** DNK čine dva komplementarna lanca nukleotida. Svaki nukleotid se sastoji od jedne od četiri nukleotidne baze: A–adenin, C–citozin, G–guanin i T–timin. Nukleotidi se uvek javljaju u paru A–T i C–G.

- (a) Na koliko načina se može kompletirati sledeći niz:
 
$$\begin{array}{cccccccc} \text{A} & \text{C} & \text{T} & \text{C} & \text{G} & \text{C} & \text{O} & \text{O} \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ \text{T} & \text{G} & \text{A} & \text{G} & \text{C} & \text{G} & \text{A} & \end{array}$$
- (b) Na koliko načina se može kompletirati sledeći niz:
 
$$\begin{array}{cccccccc} \text{A} & \text{C} & \text{O} & \text{O} & \text{G} & \text{C} & \text{O} & \text{O} \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ \text{T} & \text{O} & \text{A} & \text{G} & \text{C} & \text{G} & \text{A} & \end{array}$$
- (c) Na koliko načina se može kompletirati sledeći niz:
 
$$\begin{array}{cccccccc} \text{A} & \text{C} & \text{T} & \text{C} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ \text{T} & \text{G} & \text{A} & \text{G} & \text{C} & \text{G} & \text{O} & \end{array}$$
- (d) Na koliko načina se može kompletirati sledeći niz:
 
$$\begin{array}{cccccccc} \text{A} & \text{O} & \text{T} & \text{C} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ \text{T} & \text{O} & \text{A} & \text{G} & \text{C} & \text{G} & \text{O} & \end{array}$$

**Zadatak 2.7** Registarske tablice u Bosni i Hercegovini se sastoje od tri cifre, jednog slova i još tri cifre, pri čemu prva cifra nije nula, a kao slovo se može pojaviti samo jedno od sledećih slova: A, E, J, K, M, O, T. Na primer, 103-T-010 je dobra registarska oznaka, dok 099-A-731 i 103-C-010 to nisu. Koliko različitih registarskih oznaka se može formirati na ovaj način?

**Zadatak 2.8** Koliko ima prirodnih brojeva u čijem decimalnom zapisu nema jednakih cifara i čije cifre pripadaju skupu  $\{1, 3, 5, 7\}$ ?

**Zadatak 2.9** Automobilske registarske tablice u jednoj zemlji se sastoje od 3 cifre iza kojih slede 2 slova engleske abecede (ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ). Pri tome, prva cifra ne sme biti 0. Koliko se različitih registarskih tablica može formirati na ovaj način?

**Zadatak 2.10** Registarski broj automobila u jednoj državi se sastoji iz dva slova engleske abecede (ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ) iza kojih se nalazi šest cifara. Pri tome, prva cifra ne može biti nula. Koliko različitih registracija se može napraviti?

**Zadatak 2.11** Koliko ima desetocifrenih brojeva kojima su sve cifre različite, kojima na prvom mestu stoji parna cifra, a na poslednja dva neparna cifra. (Napomena: Na prvom mestu ne sme stajati nula!)

**Zadatak 2.12** Četiri bračna para čine grupu od 8 osoba. Na koliko različitih načina može od članova ove grupe da se formira tročlana komisija ako:

(a) u komisiji mogu da budu bilo koja tri od osam članova;

(b) u komisiji mogu da budu dve žene i jedan muškarac;

(c) u komisiji ne mogu istovremeno da budu muž i žena.

**Zadatak 2.13** Telefonski broj u gradu Kukugradu može biti petocifren ili šestocifren i ne sme početi ciframa 0, 1 i 9. Koliko različitih telefonskih brojeva može biti u tom gradu?

**Zadatak 2.14** Neka je  $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$  skup od 26 slova engleske abecede. Koliko različitih reči dužine 5 se može sastaviti od ovih 26 slova, ako se zahteva da prvo i peto slovo budu različiti samoglasnici ( $a, e, i, o, u$ ), dok su ostala tri slova bilo koji (ne nužno različiti) suglasnici?

**Zadatak 2.15** Koliko ima različitih skupova od po 5 prirodnih brojeva od  $1, \dots, 100$  takvih da je zbir elemenata svakog od njih paran broj?

**Zadatak 2.16** Koliko ima permutacija cifara  $1, 2, 3, \dots, 9$  u kojima nije 1 ispred 2?

**Zadatak 2.17** U jednoj komisiji Evropske unije nalazi se 9 Nemaca, 11 Francuza i 8 Belgijanaca. Nemci u ovoj grupi govore i razumeju samo nemački jezik, Francuzi govore i razumeju samo francuski jezik, dok Belgijanci iz ove grupe tečno govore i razumeju i nemački i francuski jezik. Na koliko načina se od ovih 28 ljudi može odabrati radno telo od 12 članova za čiji rad nije potreban prevodilac?

**Zadatak 2.18** Svaki od 62 superheroja koji čine grupu *Sitni osvetnici* (engl. Petty Avengers) ima bar jednu od ove tri osobine: nadljudska snaga, mogućnost telekineze i neverovatna brzina. Neki od Sitnih osvetnika imaju tačno jednu od ovih osobina, neki tačno dve, a neki i sve tri. Nadljudsku snagu ima 27 Sitnih osvetnika, mogućnost telekineze 25 Sitnih osvetnika, a neverovatnu brzinu čak 33 sitna osvetnika. Ako se zna da 15 Sitnih osvetnika, ni manje ni više, ima tačno dve od ovih osobina, koliko Sitnih osvetnika ima sve tri osobine?

### 3 Brojevi i jednačine

**Zadatak 3.1** Kada se u prodavnici kupuju osnovne životne namirnice (kao što su hleb i mleko) u cenu koju platimo na kasi je uračunat porez od 10%, a kada se kupuju proizvodi koji ne spadaju u osnovne životne namirnice (kao što je čokolada) u cenu koju platimo na kasi je uračunat porez od 20%. Novac koji se naplati od kupaca na ime poreza se sliva u budžet. Hrastiša je kupio jedan litar mleka i jednu čokoladu. Platilo je ukupno 590 dinara, i to 110 dinara za mleko i 480 dinara za čokoladu. Koliko novca od ove prodaje će otići u budžet?

**Zadatak 3.2** Kada se iz inostranstva uvozi roba u Republiku Srbiju prvo se na nabavnu cenu zaračuna carina od 10%, a onda se na tako ocarinjenu proizvod (dakle na iznos koji se dobija kada se saberu osnovna cena i carina) zaračuna još i porez od 20%. Gejmerska kompanija „Javorka i sinovi” uvozi u Srbiju gejming konzole „Oakenshield” čija nabavna cena je 5000 dinara za jednu konzolu. Koliko će ovog uvoznika koštati jedna konzola nakon carinjenja i plaćanja poreza?

**Zadatak 3.3** Prema standardima postignuća, na „maloj maturi” se očekuje da najmanje 80% svih učenika u generaciji ostvari *osnovni nivo* standarda postignuća na testovima iz matematike. Prema rezultatima „male mature” iz 2022. godine *osnovni nivo* standarda postignuća na testovima iz matematike je postiglo samo 34% svih učenika u generaciji. Ako znamo da je 20 400 učenika te godine postiglo osnovni nivo na testovima iz matematike:

(a) koliko učenika je te godine bilo u generaciji?

(b) za koliko učenika se očekivalo da će, prema standardima postignuća, da postignu osnovni nivo na testovima iz matematike?

**Zadatak 3.4** Indeks telesne težine (*Body Mass Index*) za neku osobu se računa ovako:

$$\text{BMI} = \frac{\text{masa u kilogramima}}{(\text{visina u metrima})^2}.$$

Na osnovu ove vrednosti se težina *odrasle* osobe kategoriše prema sledećoj tabeli:

| Kategorija     | BMI                           |
|----------------|-------------------------------|
| Neuhranjenost  | $\text{BMI} < 18,5$           |
| Idealna težina | $18,5 \leq \text{BMI} < 25,0$ |
| Uvećana težina | $25,0 \leq \text{BMI} < 30,0$ |
| Gojaznost      | $\text{BMI} \geq 30,0$        |

(a) Odrediti BMI odrasle osobe koja je visoka 200 cm i ima 100 kg. U koju kategoriju se svrstava ova osoba?

(b) Odrediti BMI odrasle osobe koja je visoka 175 cm i ima 49 kg. U koju kategoriju se svrstava ova osoba?

**Zadatak 3.5** U jednu mašinu se prilikom konstrukcije ugrađuje čelična osovina koja bi, u idealnom slučaju, trebalo da ima prečnik 20 mm i dužinu 1000 mm. Fabrika koja proizvodi ove mašine saraduje sa raznim dobavljačima od kojih nisu svi pouzdani, tako da fabrika mora

da vrši kontrolu kvaliteta pre nego što dozvoli da se osovina ugradi u mašinu. Osovina je prihvatljiva ako njene dimenzije odstupaju najviše 1% od idealnih. U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** ukoliko su dimenzije navedenog proizvoda prihvatljive, odnosno **NE** ako nisu:

|   |          |          |               |
|---|----------|----------|---------------|
| Deo: Osovina RN 3421-6/B                            |          |          |               |
| Idealne dimenzije: $d = 20,00$ mm; $L = 1000,00$ mm |          |          |               |
| Dobavljač   | $d$ [mm] | $L$ [mm] | Prihvatljivo? |
| Axios d.o.o.  | 21,00    | 1001,00  | DA NE         |
| Bexios d.o.o.                                       | 20,20    | 1010,00  | DA NE         |
| Radionica „Kurbla”                                  | 19,95    | 999,00   | DA NE         |

**Zadatak 3.6** Dnevnice za službeni put se isplaćuju po sledećim pravilima:

- za svaka 24 časa provedena na putu se isplaćuje dnevnicu u punom iznosu;
- ukoliko je nakon primene prvog pravila ostalo 12 ili više sati, za to vreme se takođe isplaćuje dnevnicu u punom iznosu;
- ukoliko je nakon primene prvog pravila ostalo 8 ili više sati, ali manje od 12 sati, za to vreme se isplaćuje pola dnevnice;
- ukoliko je nakon primene prvog pravila ostalo manje od 8 sati, za to vreme se ne isplaćuje dnevnicu.

U Javorkinoj i Hrastišinoj kompaniji visina dnevnice je 1600,00 din.

(a) Hrastiša je krenuo na službeni put 16. januara 2024. u 20h, a vratio se sa službenog puta 20. januara 2024. u 11h. Koliko novca će dobiti na ime dnevnice?

(b) Javorka je krenula na službeni put 26. februara 2024. godine u 13h, a vratila se sa službenog puta 2. marta 2024. godine u 15h. Koliko novca će dobiti na ime dnevnice?

**Zadatak 3.7** (Progresivno oporezivanje) U jednoj državi se porez na zarade obračunava na sledeći način: na godišnje zarade koje ne prelaze \$10.000 se ne plaća nikakav porez; na godišnje zarade koje su strogo veće od \$10.000 ali ne prelaze \$100.000 obračunava se porez po stopi od 30%, ali samo na deo koji je iznad \$10.000; a na godišnje zarade koje su veće od \$100.000 porez se obračunava tako što se na \$10.000 ne obračunava porez, na \$90.000 se obračunava porez po stopi od 30%, dok se na sve preko \$100.000 obračunava porez po stopi od 60%. Preciznije, ako je  $z$  godišnja zarada onda se porez  $p$  obračunava ovako:

- ako je  $z \leq \$10.000$  onda je  $p = 0$ ;
- ako je  $\$10.000 < z \leq \$100.000$  onda je  $p = (z - \$10.000) \cdot 30\%$ ;
- ako je  $z > \$100.000$  onda je  $p = \$90.000 \cdot 30\% + (z - \$100.000) \cdot 60\%$ .

Koliko je Hrastiša zaradio prošle godine ako je na ime poreza na zaradu platio \$87.000?

**Zadatak 3.8** Jedne tople letnje večeri dok se odmarala u obližnjem letovalištu na moru Javorka je šetala pored luke i primetila divnu jahtu. U razgovoru sa ponositim kapetanom saznala je da je jahta dugačka 138 jardi 2 stope i 8 inča. Koliko je jahta dugačka u metrima ako se zna da jedan jard ima 3 stope, jedna stopa ima 12 inča, a jedan inč je 2,54 cm?

**Zadatak 3.9** Hrastiša je napravio program koji na ekran računara 100 puta jednu za drugom ispisuje reč BIOINFORMATIKA bez razmaka. U jednom redu na ekranu računara može da se ispiše 80 slova nakon čega računar sam prenosi tekst u novi red. Tako je Hrastišin program ispisao nekoliko redova teksta.

- (a) Koliko redova teksta je ispisao Hrastišin program?  
 (b) Kako izgleda poslednji red teksta?

**Zadatak 3.10** U jednoj generaciji ima 150 učenika. Na prvom pismenom zadatku iz informatike u toj generaciji niko nije dobio ocenu 1, 42 učenika je dobilo ocenu 2, a 48 učenika ocenu 3. Koje ocene treba da dobiju ostali učenici u generaciji kako bi prosek generacije na tom pismenom bio barem 3,50?

**Zadatak 3.11** Kompanija *Johann J. Drache AG* želi da uloži 120.000 EUR tako što će deo novca deponovati u banku, za drugi deo novca će kupiti državne obveznice, dok će preostali novac uložiti u akcije kompanije *Schizer Pharmaceuticals*. Kamata na godišnjem nivou za novac deponovan u banku iznosi 2%, dobit od državnih obveznica na godišnjem nivou je 5%, dok se za akcije kompanije *Schizer Pharmaceuticals* svake godine daje dividenda u visini od 9%. Kompanija *Johann J. Drache AG* želi da iz ova tri izvora prihoda na godišnjem nivou ukupno dobije 5.500 EUR, ali da pri tome u banku uloži dva puta više novca nego u akcije, kako bi se obezbedila od neočekivanih fluktuacija na berzi. Kako kompanija *Johann J. Drache AG* treba da raspodeli novac da bi to postigla?

**Zadatak 3.12** Na tržištu se pojavio novi telekomunikacioni operater *Cablephonics* koji tvrdi da nudi povoljnije uslove telefonskih razgovora sa nekim zemljama u inostranstvu. Hrastiša je naišao na njihov flajer u kome je pročitao sledeće:

| Najpovoljniji uslovi telefoniranja sa vašim prijateljima i rođacima u sledećim državama Evrope: |                         |               |                         |
|---|-------------------------|---------------|-------------------------|
| <i>Država</i>   | <i>Tarifa (din/min)</i> | <i>Država</i> | <i>Tarifa (din/min)</i> |
| Austrija  | 5                       | Luksemburg    | 8                       |
| BiH   | 4                       | Mađarska      | 3                       |
| Bugarska  | 5                       | Makedonija    | 4                       |
| Crna Gora   | 3                       | Nemačka       | 7                       |
| Grčka   | 6                       | Poljska       | 7                       |
| Hrvatska  | 5                       | Rumunija      | 5                       |
| Italija   | 7                       | Slovenija     | 6                       |

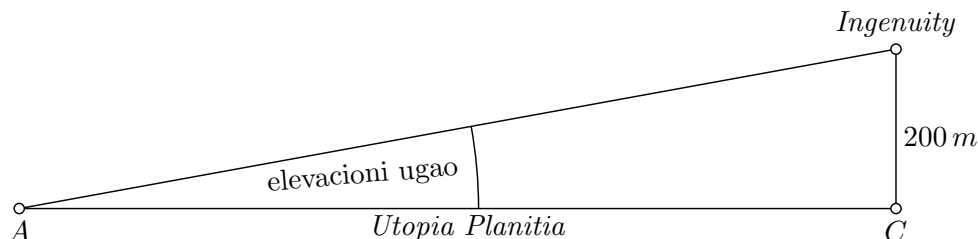
Pošto mu se ponuda učinila prihvatljivom, sklopio je ugovor sa njima. Posle tri meseca je primetio da nešto nije u redu sa njegovim telefonskim računima, koji su izgledali ovako:

| Mesec     | Razgovori sa<br>Mađarskom<br>(min) | Razgovori sa<br>Austrijom<br>(min) | Razgovori sa<br>Nemačkom<br>(min) | Račun<br>(din) |
|-----------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|----------------|
| Septembar | 90                                 | 120                                | 180                               | 2520           |
| Oktobar   | 70                                 | 100                                | 120                               | 1840           |
| Novembar  | 50                                 | 110                                | 150                               | 2060           |

Koliko je *Cablephonics* zapravo naplaćivao Hrastiši minut razgovora sa Mađarskom, Austrijom odnosno, Nemačkom?

## 4 Trigonometrija

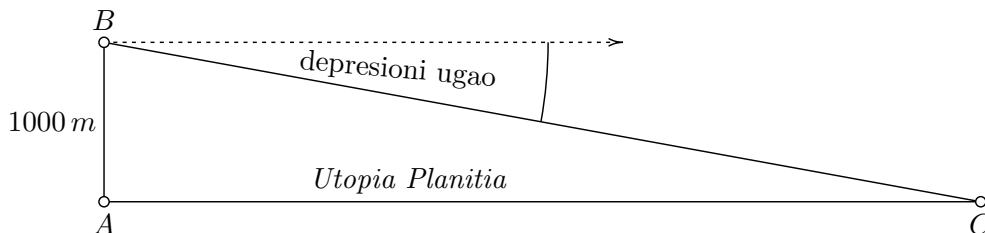
**Zadatak 4.1** Istraživačka baza  $A$  smeštena u zaravni Utopija na Marsu (*Utopia Planitia*) je uočila nešto interesantno u tački  $C$  u toj zaravni, pa je poslala helikopter *Ingenuity* u izviđanje. Kada je bio tačno iznad tačke  $C$  helikopter se javio bazi sa visine od  $200\text{ m}$ . Iz baze  $A$  se helikopter vidi pod elevacionim uglom od  $9^\circ 50'$  (9 stepeni i 50 minuta).



Oceniti udaljenost tačke  $C$  od baze  $A$  (zanemariti zakrivljenost Marsa) koristeći neke od podataka iz sledeće tabele:

| $\alpha$                    | $9^\circ 50'$ | $80^\circ 10'$ | $99^\circ 50'$ | $170^\circ 10'$ | $189^\circ 50'$ |
|-----------------------------|---------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| $\sin \alpha$               | 0,171         | 0,985          | 0,985          | 0,171           | -0,171          |
| $\cos \alpha$               | 0,985         | 0,171          | -0,171         | -0,985          | -0,985          |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | 0,173         | 5,769          | -5,769         | -0,173          | 0,173           |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | 5,769         | 0,173          | -0,173         | -5,769          | 5,769           |

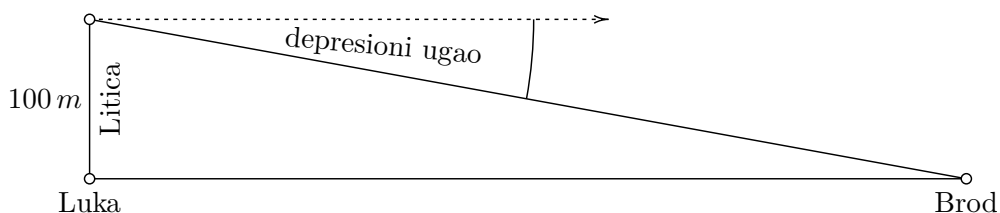
**Zadatak 4.2** Istraživačka baza  $A$  smeštena u zaravni Utopija na Marsu (*Utopia Planitia*) želi da pošalje ekspediciju do izvesne tačke  $C$  u toj zaravni. Iz osmatračkog balona  $B$  koji se nalazi na visini  $1000\text{ m}$  iznad baze  $A$  se cilj  $C$  ekspedicije vidi pod depressionim uglom od  $9^\circ 50'$  (9 stepeni i 50 minuta).



Oceniti udaljenost cilja  $C$  od baze  $A$  (zanemariti zakrivljenost Marsa) koristeći neke od podataka iz sledeće tabele:

| $\alpha$                    | $9^\circ 50'$ | $80^\circ 10'$ | $99^\circ 50'$ | $170^\circ 10'$ | $189^\circ 50'$ |
|-----------------------------|---------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| $\sin \alpha$               | 0,171         | 0,985          | 0,985          | 0,171           | -0,171          |
| $\cos \alpha$               | 0,985         | 0,171          | -0,171         | -0,985          | -0,985          |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | 0,173         | 5,769          | -5,769         | -0,173          | 0,173           |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | 5,769         | 0,173          | -0,173         | -5,769          | 5,769           |

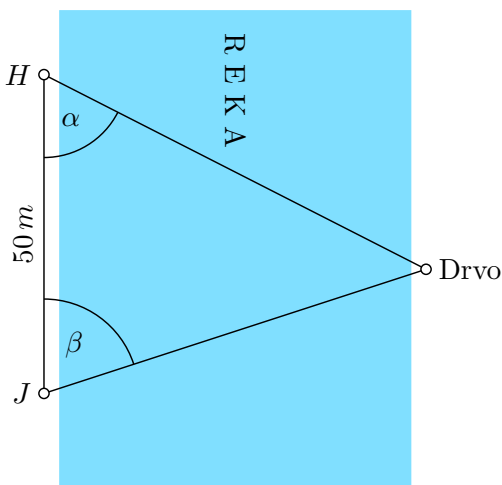
**Zadatak 4.3** Sa litice koja je visoka  $100\text{ m}$  i nalazi se tačno iznad ulaza u luku posmatramo brod koji plovi u pravcu luke. Prilikom prvog posmatranja brod se video pod depressionim uglom od  $5^\circ$ , dok se prilikom drugog posmatranja brod video pod depressionim uglom od  $20^\circ 30'$  ( $20$  stepeni i  $30$  minuta).



Oceniti rastojanje koje je brod prešao između dva osmatranja (zanemariti zakrivljenost Zemlje) koristeći neke od podataka iz sledeće tabele:

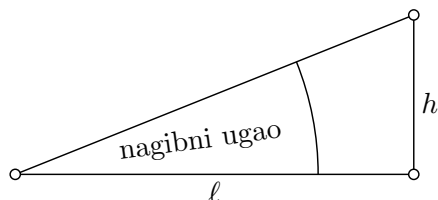
| $\alpha$                    | $5^\circ$ | $85^\circ$ | $95^\circ$ | $20^\circ 30'$ | $69^\circ 30'$ | $110^\circ 30'$ |
|-----------------------------|-----------|------------|------------|----------------|----------------|-----------------|
| $\sin \alpha$               | 0,08      | 0,99       | 0,99       | 0,35           | 0,93           | 0,93            |
| $\cos \alpha$               | 0,99      | 0,08       | -0,08      | 0,93           | 0,35           | -0,35           |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | 0,08      | 11,43      | -11,43     | 0,37           | 2,67           | -2,67           |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | 11,43     | 0,08       | -0,08      | 2,67           | 0,37           | -0,37           |

**Zadatak 4.4** Hrastiša i Javorke su odlučili da izračunaju širinu reke koja protiče kroz njihovo naselje na sledeći način. Njih dvoje su uočili jedno interesantno drvo na drugoj obali reke, onda su stali na rastojanje od  $50\text{ m}$  i izmerili dva ugla: Hrastiša je gledajući u drvo na drugoj obali izmerio ugao  $\alpha$  do Javorke, dok je Javorke gledajući u drvo na drugoj obali izmerila ugao  $\beta$  do Hrastiše. Hrastiša je izmerio  $63^\circ 26' 6''$ , a Javorke ugao  $71^\circ 33' 54''$ . Oceniti širinu reke koristeći neke od podataka iz sledeće tabele:



| $\alpha$                    | $18^\circ 26' 6''$ | $26^\circ 33' 54''$ | $63^\circ 26' 6''$ | $71^\circ 33' 54''$ |
|-----------------------------|--------------------|---------------------|--------------------|---------------------|
| $\sin \alpha$               | 0,316              | 0,447               | 0,894              | 0,948               |
| $\cos \alpha$               | 0,948              | 0,894               | 0,447              | 0,316               |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | 0,333              | 0,500               | 2,000              | 3,000               |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | 3,000              | 2,000               | 0,500              | 0,333               |

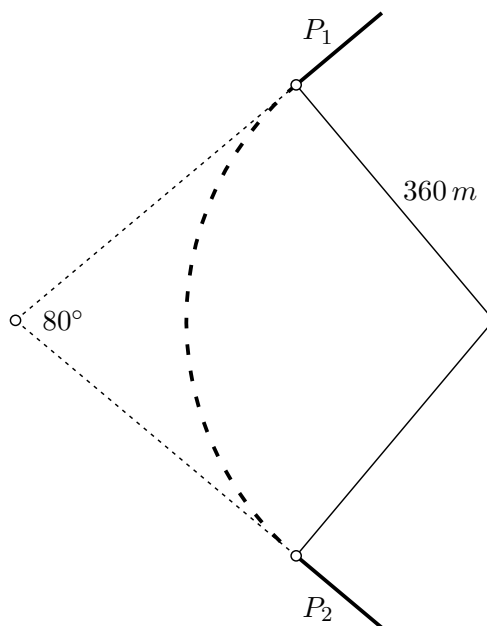
**Zadatak 4.5** Nagib saobraćajnice predstavlja odnos savladane visine ( $h$ ) i pređenog horizontalnog rastojanja ( $\ell$ ):



Nagib se često izražava u procentima. Tako, nagib od 12% znači da je  $\frac{h}{\ell} = \frac{12}{100}$ .

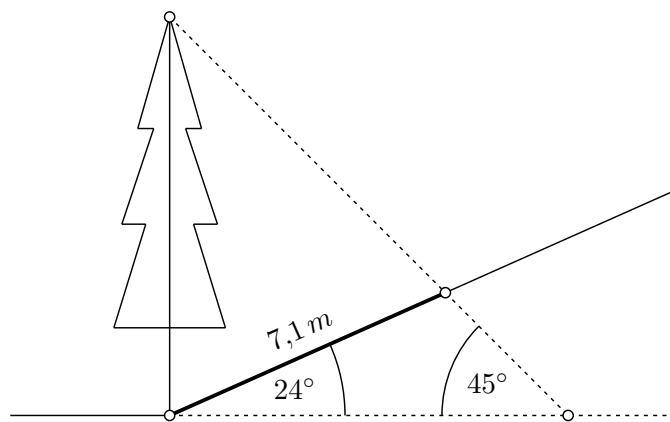
Jedan automobil se kreće usponom čiji nagib je 3% celom dužinom puta. Oceniti koju visinu je savladao automobil nakon što je prešao 3000 m. Prilikom procene koristiti činjenicu da za male nagibne uglove kao što je ovaj važi da je kosinus nagibnog ugla približno jednak 1.

**Zadatak 4.6** Krakove  $P_1$  i  $P_2$  železničke pruge treba spojiti kružnim lukom poluprečnika 360 m. Kada bi se ova dva kraka produžila do preseka, zaklopila bi ugao od  $80^\circ$ . Izračunati dužinu kružnog luka koji će ih spojiti. Uzeti da je  $\pi \approx 3,14$ .



**Zadatak 4.7** U samom podnožju brda, sa prisojne strane, raste drvo pravo uvis, dok se padina polako uspinje od drveta pod uglom od  $24^\circ$  u odnosu na horizontalu. Kada sunčevi zraci padaju pod uglom od  $45^\circ$  u odnosu na horizontalu, dužina senke koju drvo baca na padinu je 7,1 m.



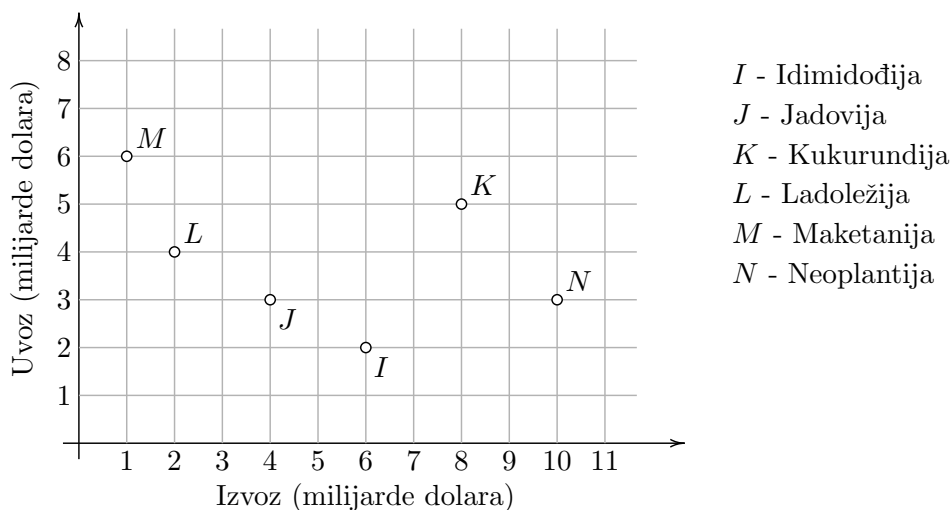


Oceniti visinu drveta koristeći neke od podataka iz sledeće tabele:

| $\alpha$                    | $24^\circ$ | $45^\circ$ | $69^\circ$ | $111^\circ$ |
|-----------------------------|------------|------------|------------|-------------|
| $\sin \alpha$               | 0,41       | 0,71       | 0,93       | 0,93        |
| $\cos \alpha$               | 0,91       | 0,71       | 0,36       | -0,36       |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | 0,45       | 1,00       | 2,61       | -2,61       |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | 2,25       | 1,00       | 0,38       | -0,38       |

## 5 Realne funkcije

**Zadatak 5.1** Na sledećem grafikonu je prikazan ukupan uvoz i ukupan izvoz za 6 država u prošloj godini:

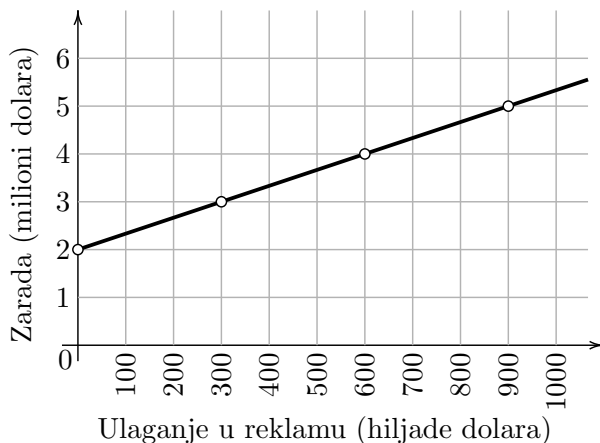


Kada država više potroši na uvoz nego što zaradi izvozom, kažemo da ima *spoljnotrgovinski deficit*. Obrnuto, ako država više zaradi izvozom nego što je potrošila na uvoz kažemo da ima *spoljnotrgovinski suficit*. Na primer, država Ladoležija je imala spoljnotrgovinski deficit u visini od 2 milijarde dolara.

(a) Koja država ima najmanji uvoz?

- (b) Koja država ima najveći izvoz?
- (c) Koja država ima najveći spoljnotrgovinski deficit?
- (d) Koja država ima najveći spoljnotrgovinski suficit?
- (e) Napiši jednačinu prave koja razdvaja države sa spoljnotrgovinskim suficitom od država sa spoljnotrgovinskim deficitom i skiciraj tu pravu na grafiku.

**Zadatak 5.2** Na sledećem grafikonu je prikazano kako ulaganje u reklamu proizvoda doprinosi zaradi jedne kompanije:



Na primer, ako uopšte ne ulaže u reklamu, zarada kompanije je 2 000 000 dolara, ali ako u reklamu uloži 900 000 dolara, zarada će skočiti na čak 5 000 000 dolara.

- (a) Kolika će biti zarada kompanije ako u reklamu uloži 600 000 dolara?
- (b) Koliko najmanje treba uložiti u reklamu da bi zarada kompanije bila 3 000 000 dolara?
- (c) Visina zarade se može opisati u funkciji od novca uloženog u reklamu formulom oblika

$$z = a \cdot u + b,$$

gde je  $z$  zarada,  $u$  je ulaganje u reklamu, a  $a$  i  $b$  su neki parametri. Odrediti parametre  $a$  i  $b$  koji odgovaraju situaciji predstavljenoj grafikonom.

**Zadatak 5.3** U jedinstvenom ekosistemu planete Mjong *aknuti* i *blambovi* žive u simbiozi. I jedna i druga vrsta organizama se hrani supstancom *mikulaks*, pri čemu blambovima za pravilan rast i održavanje zdravlja treba i supstanca *zedoron* koju aknuti proizvode. Za uzvrat, blambovi emituju snažno empatičko polje koje štiti aknute od raznih štetočina. Jedan aknut proizvede 3 ml zedorona dnevno, dok jednom blambu treba 5 ml zedorona dnevno. Jedan aknut popije 10 ml mikulaksa dnevno, dok jedan blamb popije čak 50 ml mikulaksa dnevno.

Naučna ekspedicija sa Zemlje je ustanovila da empatičko polje koje šire blambovi veoma blagotvorno deluje na ljude, pa je odlučila da donese nekoliko aknuta i nekoliko blambova na Zemlju radi daljih ispitivanja. Pri tome, ekspedicija je zainteresovana za blambove, a aknute mora da ponese kako bi blambovi živi i zdravi stigli na Zemlju. Naravno, ekspedicija će morati da ponese i dovoljnu količinu mikulaksa, ali zbog relativno malog prostora za smeštanje egzobioloških uzoraka ekspedicija može da ponese količinu mikulaksa koja odgovara potrošnji od 2 l dnevno.

Koliko aknuta, a koliko blambova ekspedicija treba da ponese na Zemlju da bi uz data ograničenja na količinu mikulaksa na Zemlju donela što više živih i zdravih blambova?

**Zadatak 5.4** Zli čarobnjak Saruman je odlučio da prestane da vija Hobite i da se posveti nauci. Kao svoju prvu vežbu iz naučno-istraživačkog rada rešio je da izračuna gravitaciono ubrzanje Mordora. Eksperiment su pripremili ovako: Saruman se popeo na vrh svoje 70 metara visoke kule, dok je njegov pomoćnik kroz jedan prozor negde blizu sredine kule ispalio iz samostrela strelu u vis. Saruman je primetio da je streli bila potrebna tačno jedna sekunda da stigne do najviše tačke na kuli na kojoj se on nalazio. Strela je potom nastavila put u vis, i u jednom trenutku počela da pada naniže, putem kojim je i ispaljena. Posle tačno 7 sekundi od ispaljivanja strele Sarumanov pomoćnik je zabeležio da je strela prošla pored prozora kroz koji je ispaljena, dok je tačno jednu sekundu kasnije strela pala na zemlju. Pogledavši u svoju čarobnu kuglu Saruman je saznao da se pređeni put strele ispaljene naviše kod uspravnog hica računa po formuli

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0,$$

gde je  $g$  gravitaciono ubrzanje Mordora,  $v_0$  je početna brzina strele, a  $h_0$  je visina prozora kroz koji je strela ispaljena. Iako vešt čarobnjak, Saruman nije uspeo da se izbori sa ovim čisto matematičkim problemom. Pomozite zlom čarobnjaku Sarumanu da odredi  $g$  – gravitaciono ubrzanje Mordora, kako bi se dodvorio svom gospodaru Sauronu.

**Zadatak 5.5** *Tražnja* predstavlja funkciju oblika

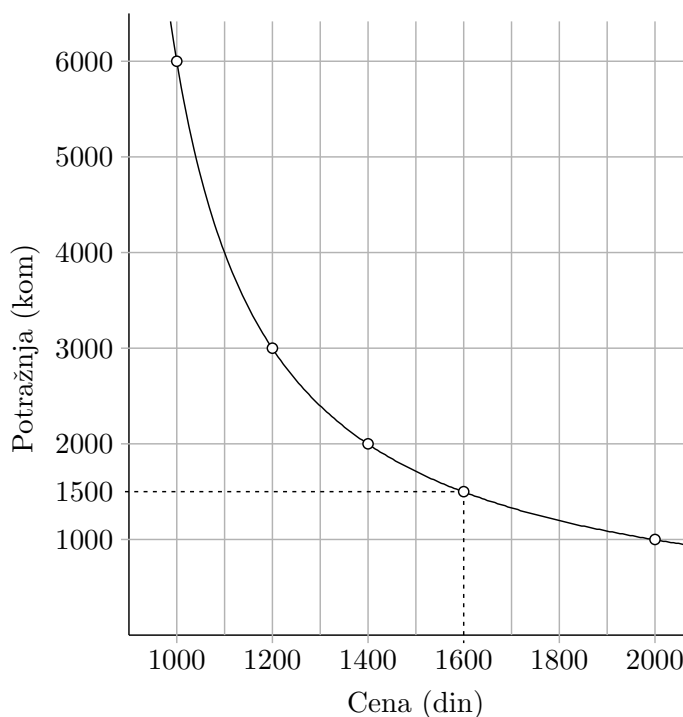
$$\text{količina} = f(\text{cena})$$

koja kaže koju količinu proizvoda možemo prodati po navedenoj ceni. Na primer, tražnja nekog proizvoda predstavljena je funkcijom pored i sa grafikona očitavamo da se po ceni od 1600 din po komadu može prodati 1500 komada tog proizvoda.

(a) Kolika je tražnja ovog proizvoda po ceni od 1400 din po komadu?

(b) Koliko najviše može da košta jedan komad ovog proizvoda ako želimo da prodamo 3000 komada?

(c) Tražnja koja je predstavljena na gornjem dijagramu ima oblik



$$f(x) = \frac{a}{x - b}.$$

Odrediti parametre  $a$  i  $b$  tako da dati dijagram predstavlja grafik funkcije  $f$ .

**Zadatak 5.6** Kompanija “Frula&Opanak Ltd” proizvodi suvenire, i to čini veoma uspešno. Novi menadžment kompanije je odlučio da pokrene proizvodnju nove vrste suvenira, ali još treba da odluči da li će da izgrade sopstveni proizvodni pogon, ili da proizvodnju autorsuju kompaniji “Kolo&Vreteno Inc”. Ukoliko menadžment odluči da se izgradi sopstveni pogon

kompanija će imati 100 000 evra inicijalnih troškova za izgradnju pogona, i onda će trošak za izradu suvenira iznositi 4 evra po komadu. S druge strane, ako menadžment odluči da autorsuje proizvodnju onda će od kompanije “Kolo&Vreteno Inc” dobijati suvenire po ceni od 14 evra po komadu, što u tom slučaju predstavlja jedine troškove.

(a) Ako je kompanija “Frula&Opanak Ltd” odlučila da napravi barem 11 000 suvenira, kada su troškovi manji: ako napravi sopstveni pogon za proizvodnju ili ako autorsuje proizvodnju?

(b) Ako je kompanija “Frula&Opanak Ltd” odlučila da napravi najviše 8 000 suvenira, kada su troškovi manji: ako napravi sopstveni pogon za proizvodnju ili ako autorsuje proizvodnju?

(c) Za koju količinu proizvedenih suvenira su troškovi izgradnje sopstvenog pogona isti kao troškovi autorsovanja proizvodnje?

## 6 Programiranje

*Zadaci iz programiranja se mogu rešiti u bilo kom programskom jeziku.*

**Zadatak 6.1** Napisati program koji učitava dimenziju niza  $1 \leq K \leq 50$ , a zatim i niz prirodnih brojeva manjih od 10000 zadate dimenzije  $K$  (vršiti kontrolu unosa). Potom je potrebno pronaći i ispisati na ekranu tri najveća različita elementa niza.

**Zadatak 6.2** Napisati program koji učitava dimenziju niza  $1 \leq K \leq 50$ , a zatim i niz prirodnih brojeva manjih od 10000 zadate dimenzije  $K$  (vršiti kontrolu unosa). Potom je potrebno ispisati na ekranu sve elemente niza čiji je zbir cifara dvocifren broj.

**Zadatak 6.3** Napisati program koji rešava sledeći problem. Treba učitati petocifreni broj broj. Zatim treba generisati i odštampati niz cifre čiji su elementi cifre učitanoog broja koje su veće od prosečne vrednosti svih cifara učitanoog broja. Primer: broj= 93552, cifre= [9, 5, 5] (jer je prosek 4,8). Kod učitavanja broja treba vršiti kontrolu unosa. Takođe treba omogućiti višestruko izvršavanje programa na zahtev korisnika.

**Zadatak 6.4** Napisati program koji od korisnika učitava prirodan broj  $N$ ,  $5 \leq N \leq 1000$ , a zatim i niz  $L$  od  $N$  prirodnih brojeva. Vršiti kontrolu unosa u svim učitavanjima. Među članovima niza pronaći i ispisati one koji su deljivi prvom cifrom broja  $N$  (gledano sleva na desno). Npr. za  $N = 8$  i  $L = [2, 18, 32, 45, 17, 64, 12, 56]$  ispisuju se 32, 64 i 56. Treba omogućiti višestruko izvršavanje programa na zahtev korisnika.

**Zadatak 6.5** Napisati program koji od korisnika učitava prirodan broj  $N$ ,  $10 \leq N \leq 1000$ , a zatim i niz  $L$  od  $N$  realnih brojeva. Vršiti kontrolu unosa u svim učitavanjima. Niz  $L$  treba izmeniti tako da svaki elemenat koji je bar 2 puta manji od prosečne vrednosti članova niza treba zameniti nulom. Na kraju treba odštampati izmenjeni niz  $L$ . Npr. za  $N = 10$  i niz  $L = [2.4, -3.2, 7.3, 8.2, 12.6, -2.2, -1.0, 8.0, 16.4, 4.0]$  ispisuje se  $L = [0, 0, 7.3, 8.2, 12.6, 0, 0, 8.0, 16.4, 4.0]$ . Treba omogućiti višestruko izvršavanje programa na zahtev korisnika.

**Zadatak 6.6** Napisati program koji učitava prirodan broj  $N$ , a zatim izračunava i štampa drugu po redu cifru  $C$  gledano sa leve strane broja  $N$ , koja je veća od 3. Ukoliko broj  $N$  nema dve cifre koje su veće od 3 odštampati odgovarajuću poruku. Primer: Ako je  $N = 7326$  tada je  $C = 6$ .

**Zadatak 6.7** Napisati program koji učitava dimenziju niza  $1 \leq K \leq 50$ , a zatim i niz prirodnih brojeva manjih od 10000 zadate dimenzije  $K$  (vršiti kontrolu unosa). Potom je potrebno ispisati na ekranu sve elemente niza kojima je prva cifra jednaka sa poslednjom. Napomena: za jednocifrene elemente niza važi da je prva cifra jednaka poslednjoj.

## 7 Rešenja

### 1.1.

| Iskaz   | Iskaz je tačan? |    | Odgovor   |
|---|-----------------|----|---|
| $a + b + c + d = a + b + c$                           | DA              | NE | DA, jer je $d = 0$  |
| $a > 0 \wedge b > 0$                                  | DA              | NE | DA, jer su i $a$ i $b$ pozitivni  |
| $c < 0 \vee d < 0$                                    | DA              | NE | DA, jer je $c$ negativan, što je dovoljno da disjunkcija bude tačna         |
| $(\forall x \in P) x$ je deljiv sa 3                  | DA              | NE | DA, jer je vrednost svake promenljive deljiva sa 3                          |
| $(\exists x \in P) x > 9$                             | DA              | NE | NE, jer ne postoji promenljiva čija vrednost je strogo veća od 9            |
| $(\forall x \in P)(\forall y \in P) x + y \geq 3$     | DA              | NE | NE, jer je $c + d < 3$  |
| $(\forall x \in P)(\exists y \in P) x \cdot y \geq 0$ | DA              | NE | DA, jer za svako $x$ možemo da uzmemo $y = d = 0$ i tada je $x \cdot y = 0$ |

### 1.2.

| Iskaz  | Iskaz je tačan? |    | Odgovor   |
|--|-----------------|----|---|
| $a \rightarrow d$  | DA              | NE | NE, jer ne postoji direktan put od $a$ do $d$   |
| $a \rightsquigarrow e$   | DA              | NE | DA, jer se od $a$ do $e$ može stići preko $b$ i $d$   |
| $(\forall x \in G)(\exists y \in G) x \rightarrow y$                                     | DA              | NE | DA, jer iz svakog grada vodi direktan put u neki grad: $a \rightarrow b, b \rightarrow d, c \rightarrow a, d \rightarrow e, e \rightarrow c, f \rightarrow d$ |
| $(\forall x \in G)(\exists y \in G)(x \rightarrow y \vee y \rightarrow x)$               | DA              | NE | DA, vidi prethodni odgovor  |
| $(\exists x, y, z \in G)(x \rightarrow y \wedge y \rightarrow z \wedge z \rightarrow x)$ | DA              | NE | DA, jer $c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow c$   |
| $(\forall x \in G) a \rightsquigarrow x$   | DA              | NE | DA, jer $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f$   |
| $(\forall x \in G)(\forall y \in G) x \rightsquigarrow y$                                | DA              | NE | DA jer $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow c \rightarrow a$                      |

**1.3.**

| Iskaz   | Iskaz je tačan? |    | Odgovor   |
|---|-----------------|----|---|
| Za svako pojavljivanje slova A u nizu negde desno od njega se javlja slovo C    | DA              | NE | DA, jer se niz završava slovom C                                  |
| Za svako pojavljivanje slova G u nizu negde levo od njega se javlja slovo T     | DA              | NE | DA, jer se T prvi put javlja na 4. mestu, a pre toga nema slova G |
| Slovo C se javlja u nizu češće nego slovo T                                     | DA              | NE | NE, slovo T se javlja češće (vidi dole)                           |
| Slovo A je najfrekventnije slovo (tj. javlja se češće nego ostala slova u nizu) | DA              | NE | DA: A-15, C-7, T-8, G-9   |
| U nizu se javlja kombinacija TGA  | DA              | NE | NE  |
| Postoji slovo C u nizu neposredno iza koga se javlja slovo G                    | DA              | NE | NE  |
| Neposredno iza svake kombinacije GT uvek sledi slovo A                          | DA              | NE | DA  |

1.4.

| Iskaz  | Iskaz je tačan? |    | Odgovor   |
|--|-----------------|----|---|
| U nekim mesecima je potrošnja prelazila 300 kWh  | DA              | NE | DA, na primer u januaru   |
| Potrošnja nikada nije padala ispod 200 kWh   | DA              | NE | DA  |
| Postoje dva meseca u kojima je potrošnja bila ista   | DA              | NE | DA, u martu i avgustu   |
| U januaru je potrošnja bila veća od prosečne potrošnje za tu godinu  | DA              | NE | DA: lako se bez računa vidi da je prosečna potrošnja manja od 300 kWh jer veću potrošnju u januaru "pojede" mala potrošnja u aprilu, a svi ostali brojevi u tabeli su ispod 300       |
| Postoji mesec u kome je potrošnja bila manja od medijalne potrošnje za tu godinu                           | DA              | NE | DA: minimalna potrošnja u aprilu je sigurno manja od medijalne potrošnje  |
| Ukupna potrošnja u martu, aprilu i maju je bila veća nego ukupna potrošnja u septembru, oktobru i novembru | DA              | NE | NE, upravo obrnuto jer je SEP > MAR, OKT > APR i NOV > MAJ  |
| Prosečna dnevna potrošnja u januaru je bila veća od prosečne dnevne potrošnje u februaru                   | DA              | NE | NE: januar ima 31 dan pa je prosečna dnevna potrošnja u januaru $309/31 < 10$ ; februar ima 28 ili 29 dana pa je prosečna dnevna potrošnja u februaru $291/28 > 10$ ili $291/29 > 10$ |



### 1.5.

| Iskaz  | Iskaz je tačan? |    | Odgovor   |
|--|-----------------|----|---|
| U poslednjoj godini navedenog perioda je Kukurundija imala najbolji izvozni rezultat od svih godina za koje su nam dati podaci | DA              | NE | DA  |
| Postoji godina u posmatranom periodu kada je Kukurundija duplo više novca potrošila na uvoz nego što je zaradila izvozom       | DA              | NE | DA: 2017 je uvoz = 6, izvoz = 3   |
| U nekim godinama navedenog perioda je Kukurundija imala spoljnotrgovinski suficit  | DA              | NE | DA: 2019. i 2023.   |
| U navedenom periodu je država Kukurundija češće imala spoljnotrgovinski suficit nego spoljnotrgovinski deficit                 | DA              | NE | NE: suficit je imala samo 2019. i 2023. godine; u ostalim godinama posmatranog perioda je imala deficit |
| U navedenom periodu država Kukurundija nikada nije imala spoljnotrgovinski deficit veći od 5 milijardi dolara                  | DA              | NE | DA  |
| U navedenom periodu je država Kukurundija više zaradila od izvoza nego što je potrošila na uvoz                                | DA              | NE | NE  |

**1.6.** (a) U drugom redu nedostaju brojevi 7 i 8, a kolona 4 sadrži broj 7. Zato red 2 izgleda ovako: 2 9 6 8 1 5 3 4 7.

(b) Pošto kutija 2, kolona 7 i kolona 9 već sadrže broj 1, u redu 3 broj 1 treba upisati na 8. mesto. Pošto kutija 2 i kolona 7 već sadrže broj 6, u redu 3 broj 6 treba upisati na 9. mesto. Pošto kutija 3, kolona 4 i kolona 5 već sadrže broj 7, u redu 3 broj 7 treba upisati na 6. mesto. Broj 2 sada treba upisati na 4. mesto u redu 3, broj 4 na 5. mesto, i konačno, broj 9 na 7. mesto. Zato red 3 izgleda ovako: 5 8 3 2 4 7 9 1 6.

(c) Broj 4: red 7 već sadrži brojeve 1, 3, 6, 7, 8; kolona 6 sadrži brojeve 5 i 9; a kutija u kojoj se nalazi polje  $A$  sadrži broj 2.

(d) Pretpostavimo da polje  $B$  sadrži broj 4 i pokušajmo da popunimo kolonu 2. U polje (red 8, kolona 2) tada može da se upiše jedino broj 5, u polje (red 5, kolona 2) može da se upiše jedino broj 6, pa ostaje da u polje (red 9, kolona 2) može da se upiše jedino broj 7. Tako dobijamo da je u redu 9 dva puta upisan broj 7, što nije dozvoljeno.

**2.1.** Osam drugova treba da se razmesti na osam mesta u bioskopu. Prvi može da bira bilo koje od 8 raspoloživih mesta. Kada se on smesti, sledeći može da odabere bilo koje od preostalih 7 mesta (jer u bioskopu nije dozvoljeno sedenje u krilu), sledeći bilo koje od preostalih 6 mesta i tako do poslednjeg koji mora da sedne na jedino preostalo mesto. Prema tome, oni mogu da se rasporede na  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$  načina.

**2.2.** (a) Ako Javorka i Hrastiša sede jedno do drugog, to može biti na dva načina: JH ili HJ. Jasno je da je dovoljno utvrditi broj načina za slučaj JH, jer se u slučaju HJ dobija isti broj rasporeda. Dakle, pretpostavimo da Javorka i Hrastiša sede ovako: JH. Sada to tretiramo kao jedan paket [JH]. Neka su ostalih šest drugova A, B, C, D, E i F. Dakle, imamo ukupno 7 “paketa” koje treba da rasporedimo: A, B, C, D, E, F, [JH]. Koristeći ideju iz prethodnog zadatka vidimo da 7 “paketa” možemo da ispermutujemo na  $7!$  načina. Dakle,

- raspored [JH]:  $7!$  rasporeda
- raspored [HJ]:  $7!$  rasporeda (isto kao gore)

UKUPNO:  $2 \cdot 7!$  rasporeda.

(b) Da bismo videli koliko ima rasporeda kod kojih Javorka i Hrastiša NE sede jedno do drugog, od ukupnog broja rasporeda (što je  $8!$ ) treba oduzeti nepovoljne (kada Javorka i Hrastiša sede jedno do drugog). Dakle:  $8! - 2 \cdot 7!$ .

**2.3.** (a) Za prvu cifru pina imamo 10 mogućnosti ( $0 \dots 9$ ), za drugu 9 (jer ne možemo da koristimo cifru koja se nalazi na prvom mestu), za treću 8 (jer smo iskoristili dve cifre) i za poslednju 7 mogućnosti. To nam daje ukupno  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$  mogućnosti.

(b) Na  $\binom{4}{2}$  načina možemo od četiri mesta za cifre u pinu da odaberemo dva na koja ćemo staviti cifru koja se ponavlja, a tu cifru možemo da odaberemo na 10 načina ( $0 \dots 9$ ). Za treće mesto u pinu sada imamo 9 mogućnosti (sve cifre osim one koja je ponovljena), a za četvrto mesto 8 mogućnosti. To nam daje ukupno  $\binom{4}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$  mogućnosti.

**2.4.** Na  $\binom{6}{3}$  načina možemo od šest mesta za cifre u pinu da odaberemo tri na koja ćemo staviti cifru 8, na  $\binom{3}{2}$  načina možemo od tri preostala mesta da odaberemo dva na koja ćemo staviti cifru 6, pa na jedino nepopunjeno mesto stavljamo cifru 3. To nam daje ukupno  $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 1$  mogućnosti.

**2.5.** Tim će se sastojati ili od dva biologa i jednog informatičara, ili od jednog biologa i dva informatičara. Ako se tim sastoji od dva biologa i jednog informatičara, od 5 biologa možemo odabrati dva za tim na  $\binom{5}{2}$  načina, dok od 5 informatičara možemo odabrati jednog za tim na 5 načina. S druge strane, ako se tim sastoji od jednog biologa i dva informatičara, od 5 biologa možemo odabrati jednog za tim na 5 načina, dok od 5 informatičara možemo odabrati dva za tim na  $\binom{5}{2}$  načina. Ukupno, takav tim se može odabrati na  $\binom{5}{2} \cdot 5 + 5 \cdot \binom{5}{2}$  načina.

**2.6.** (a) Na tačno jedan način: u kružić se može upisati samo T.

(b) Na tačno jedan način: u kružiću u donjem redu može da se nalazi samo G, u prvom kružiću u gornjem redu može da se nalazi samo T, dok u drugom kružiću u gornjem redu može da se nalazi samo C.

(c) Na četiri načina: prva dva kružića u gornjem redu su jednoznačno određena (G i C), dok poslednji par može biti bilo koji od parova A-T, T-A, C-G, G-C.

(d) Na  $4 \cdot 4 = 16$  načina: za drugi par imamo 4 mogućnosti (A-T, T-A, C-G, G-C), za poslednji par imamo takođe 4 mogućnosti, dok se preostala dva kružića mogu popuniti na tačno jedan način.

**2.7.** Za prvu cifru imamo 9 mogućnosti (jer nula ne sme da se javlja na prvom mestu), za svaku od preostalih cifara imamo 10 mogućnosti, dok za slovo u sredini imamo 7 mogućnosti. To nam daje ukupno  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 10$  mogućnosti.

**2.8.** Takav broj može biti jednocifren, dvocifren, trocifren ili četvorocifren. Jednocifrenih brojeva ima 4, dvocifrenih  $4 \cdot 3$ , trocifrenih  $4 \cdot 3 \cdot 2$  i četvorocifrenih  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Ukupno:  $4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

**2.9.** Engleska abeceda ima 26 slova. Prema tome, broj različitih registracija je  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26$  jer prva cifra ne sme biti 0.

**2.10.** Rezonujemo slično kao u Zadatku 2.9 i dobijamo  $26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10^5$  mogućnosti jer prva cifra ne sme biti 0, a iza dva slova sledi 6 cifara.

**2.11.** Na prvom mestu ovog broja stoji parna cifra koja ne sme biti nula, i zato za prvo mesto imamo 4 mogućnosti (2, 4, 6, 8). Za poslednje i pretposlednje mesto imamo 5 mogućnosti (1, 3, 5, 7, 9), dok za sva ostala mesta imamo 10 mogućnosti. Ukupno, takvih brojeva ima  $4 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 5$ .

**2.12.** (a) Od 8 osoba možemo odabrati 3 na  $\binom{8}{3}$  načina.

(b) Od četiri žene možemo odabrati dve predstavnice na  $\binom{4}{2}$  načina, dok od četiri muškarca možemo odabrati jednog predstavnika na 4 načina. Ukupno:  $\binom{4}{2} \cdot 4$  načina.

(c) Od ukupnog broja komisija  $\binom{8}{3}$  oduzećemo one koje ne odgovaraju uslovima zadatka. Komisiju koja ne odgovara uslovima zadatka pod (c) čine jedan bračni par i još jedna od preostalih 6 osoba. Bračni par možemo odabrati na 4 načina (jedan od četiri), dok još jednu od preostalih 6 osoba možemo odabrati na 6 načina. Zato komisija koje ne odgovaraju uslovima zadatka ima  $4 \cdot 6$ , pa "dobrih" komisija ima  $\binom{8}{3} - 4 \cdot 6$ .

**2.13.** Petocifrenih telefonskih brojeva ima  $7 \cdot 10^4$  jer na prvom mestu ne smeju da se nalaze cifre 0, 1 i 9. Iz istog razloga šestocifrenih brojeva ima  $7 \cdot 10^5$ . Ukupno ih ima  $7 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5$ .

**2.14.** Za prvo mesto imamo 5 mogućnosti (a, e, i, o, u), a za peto mesto 4 mogućnosti jer smo jedan samoglasnik već iskoristili. Za drugo, treće i četvoro mesto imamo imamo 21 mogućnost (sva slova osim a, e, i, o, u), i pri tome suglasnici smeju da se ponavljaju. Zato traženih reči ima  $5 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 4$ .

**2.15.** Zbir pet brojeva može biti paran broj samo u sledećim slučajevima: svih pet brojeva su parni; tri od tih pet brojeva su parni, a dva neparna; ili jedan broj je paran, a četiri neparna. Kako među brojevima 1, 2, ..., 100 ima tačno 50 parnih i 50 neparnih, zaključujemo sledeće:

- pet parnih brojeva možemo odabrati na  $\binom{50}{5}$  načina;
- tri parna i dva neparna broja možemo odabrati na  $\binom{50}{3} \cdot \binom{50}{2}$  načina;
- jedan paran i četiri neparna broja možemo odabrati na  $50 \cdot \binom{50}{4}$  načina.

Ukupno, takvih skupova ima  $\binom{50}{5} + \binom{50}{3} \cdot \binom{50}{2} + 50 \cdot \binom{50}{4}$ .

**2.16.** Podsetimo se: permutacija cifara 1, 2, 3, ..., 9 je svaki niz u kome se svaka od cifara 1, 2, 3, ..., 9 javlja tačno jednom. Na primer, 314258697 ili 638297145. Prema tome, ako u permutaciji nije 1 ispred 2, onda mora biti 2 ispred 1. Na primer, u permutaciji 638297145 nije 1 ispred 2, i zato je 2 ispred 1.

Primetimo sledeće: svakoj permutaciji u kojoj je 2 ispred 1 može se jednoznačno dodeliti permutacija u kojoj je 1 ispred 2: samo cifre 1 i 2 zamene mesta. Na primer,  $314258697 \leftrightarrow 324158697$  i  $638297145 \leftrightarrow 638197245$ . Odadtle sledi da tačno pola permutacija ima osobinu da je 1 ispred 2, dok druga polovina ima osobinu da je 2 ispred 1. Ilustrovaćemo ovo na manjem primeru gde se posmatraju permutacije cifara 1, 2, 3, 4:

$$\underbrace{\begin{array}{cccccccccccc} 1234 & 1342 & 3124 & 4123 & 1243 & 1423 & 3142 & 4132 & 1324 & 1432 & 3412 & 4312 \\ 2134 & 2341 & 3214 & 4213 & 2143 & 2413 & 3241 & 4231 & 2314 & 2431 & 3421 & 4321 \end{array}}_{4! \text{ permutacija}}$$

Vratimo se sada na osnovni problem: traženih permutacija ima  $\frac{9!}{2}$  – polovina od ukupnog broja permutacija cifara 1, 2, ..., 9.

**2.17.** Očigledno je da radno telo od 12 članova ne mogu da čine pripadnici samo jedne nacije (radno telo treba da ima 12 članova, a ima 9 Nemaca, 11 Francuza i 8 Belgijanaca). Zato radno telo za čiji rad nije potreban prevodilac mora imati bar jednog Belgijanca. Broj ovakvih radnih tela ćemo dobiti tako što ćemo od ukupnog broja načina na koji se može formirati grupa od 12 članova,  $\binom{28}{12}$ , oduzeti broj grupa u kojima ne učestvuju Belgijanci. Radnih grupa u kojima ne učestvuju Belgijanci ima  $\binom{20}{12}$  zato što od 20 ljudi (9 Nemaca i 11 Francuza) biramo grupu od 12 članova. Rešenje zadatka je, prema tome,  $\binom{28}{12} - \binom{20}{12}$ .

**2.18.** Neka skup  $S$  čine svi pripadnici ove grupe koji imaju nadljudsku snagu, neka skup  $T$  čine svi Sitni osvetnici koji imaju mogućnost telekineze, a skup  $B$  oni koji imaju neverovatnu brzinu. Neki od sitnih osvetnika se može pojaviti u dva od ovih skupova, a oni koji imaju sve tri osobine će se pojaviti u sva tri skupa.

Zato što svaki Sitni osvetnik ima bar jednu od ove tri osobine mora biti  $|S \cup T \cup B| = 62$ . Pored toga znamo da je  $|S| = 27$ ,  $|T| = 25$  i  $|B| = 33$ . Prema Formuli uključenja-isključenja za tri skupa je:

$$|S \cup T \cup B| = |S| + |T| + |B| - |S \cap T| - |S \cap B| - |T \cap B| + |S \cap T \cap B|.$$

Mi treba da nađemo broj  $n = |S \cap T \cap B|$ . Kada u gornju relaciju zamenimo ono što znamo iz uslova zadatka, ona postaje:

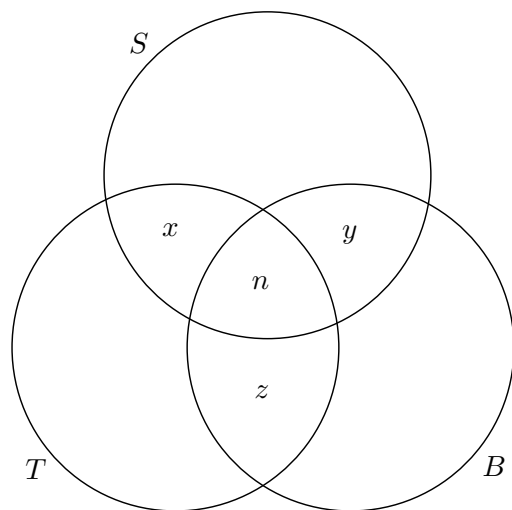
$$62 = 27 + 25 + 33 - |S \cap T| - |S \cap B| - |T \cap B| + n,$$

odnosno, nakon malo sređivanja:

$$n = |S \cap T| + |S \cap B| + |T \cap B| - 23. \quad (7.1)$$

Pored toga, mi znamo i da 15 Sitnih osvetnika ima tačno dve od ovih osobina. Da bismo iskoristili ovaj podatak pogledajmo sledeći Venov dijagram, gde su uvedene sledeće ove dodatne oznake:

- $x$  je broj Sitnih osvetnika koji su u  $S$  i  $T$ , ali nisu u  $B$ ,
- $y$  je broj Sitnih osvetnika koji su u  $S$  i  $B$ , ali nisu u  $T$ , i
- $z$  je broj Sitnih osvetnika koji su u  $B$  i  $T$ , ali nisu u  $S$ .



Uslov da 15 Sitnih osvetnika ima tačno dve od ovih osobina znači da je

$$x + y + z = 15.$$

Pored toga, sa dijagrama vidimo da je  $|S \cap T| = x + n$ ,  $|S \cap B| = y + n$  i  $|T \cap B| = z + n$ .  
Konačno:

$$\begin{aligned} n &= |S \cap T| + |S \cap B| + |T \cap B| - 23 \\ &= (x + n) + (y + n) + (z + n) - 23 \\ &= (x + y + z) + 3n - 23 \\ &= 15 + 3n - 23 = 3n - 8, \end{aligned}$$

odakle se dobija da je  $n = 4$ . Dakle, samo 4 Sitna osvetnika imaju sve tri osobine.

**3.1.** Neka je  $m$  cena mleka bez uračunatog poreza, a  $c$  cena čokolade bez uračunatog poreza. Na mleko kao osnovnu životnu namirnicu se dodaje porez u visini od 10%, i zato je cena mleka u prodavnici data izrazom:

$$m' = m + \frac{10}{100}m = \frac{110}{100}m.$$

Kako je Hrastiša mleko u prдавnici platio 110 din, zaključujemo da je  $m' = 110$ , pa je  $m = 100$ . Dakle, na porez je otišlo 10 din od kupovine mleka.

Čokolada nije osnovna životna namirnica pa se na nju primenjuje porez u visini od 20%. Zato je cena čokolade u prodavnici data izrazom:

$$c' = c + \frac{20}{100}c = \frac{120}{100}c.$$

Kako je Hrastiša čokoladu u prдавnici platio 480 din, zaključujemo da je  $c' = 480$ , pa je  $c = 400$ . Dakle, na porez je otišlo 80 din od kupovine čokolade.

Od cele Hrastišine kupovine na porez je, prema tome, otišlo  $10 + 80 = 90$  din.

**3.2.** Nabavna cena konzole je 5000 din. Carina iznosi 10% od nabavne cene, što je  $5000 \cdot \frac{10}{100} = 500$  din. Zato je cena konzole nakon carinjenja 5500 din. Tako ocarinjeni proizvod se sada

oporezuje porezom u visini 20%. Porez iznosi  $5500 \cdot \frac{20}{100} = 5500 \cdot \frac{1}{5} = 1100$  dinara. Konačna cena se dobija kada se na ocarinjenu proizvod doda porez:  $5500 + 1100 = 6600$  dinara. Krajnji kupac će konzolu platiti po ceni od 6600 dinara.

**3.3.** (a) Neka je u toj generaciji bilo  $n$  učenika. Osnovni nivo standarda je postiglo samo 34% generacije, odnosno, 20 400 učenika, što znači da je

$$n \cdot \frac{34}{100} = 20\,400.$$

Zato je

$$n = 20\,400 \cdot \frac{100}{2 \cdot 17} = \frac{20\,400}{17} \cdot 50 = 1\,200 \cdot 50 = 60\,000.$$

(b) Prema standardima postignuća očekivalo se da će najmanje 80% generacije da postigne osnovni nivo. Dakle, očekivalo se da će najmanje

$$60\,000 \cdot \frac{80}{100} = 48\,000$$

učenika postići osnovni nivo.

**3.4.** (a) Radi se o osobi koja je visoka 2 m i ima 100 kg i zato je njen BMI jednak sa

$$\text{BMI} = \frac{\text{masa u kilogramima}}{(\text{visina u metrima})^2} = \frac{100}{2^2} = 25.$$

Prema tabeli, radi se o osobi koja ima uvećanu težinu.

(b) U ovom slučaju se radi o osobi koja je visoka 1,75 m i ima 49 kg i njen BMI je:

$$\text{BMI} = \frac{49}{1,75^2} = \frac{49}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{49 \cdot 16}{49} = 16.$$

Prema tabeli, radi se o osobi koja je neuhranjena.

**3.5.** Obzirom da prihvatljive dimenzije ne smeju da odstupaju više od 1% od idealnih, odstupanje prečnika od idealnog *ne sme da bude veće od*

$$20 \text{ mm} \cdot \frac{1}{100} = 0,2 \text{ mm},$$

dok odstupanje dužine od idealne *ne sme da bude veće od*

$$1000 \text{ mm} \cdot \frac{1}{100} = 10 \text{ mm}.$$

| Dobavljač          | $d$ [mm] | $L$ [mm] | Prihvatljivo? | Odgovor  |
|--------------------|----------|----------|---------------|--|
| Axios d.o.o.       | 21,00    | 1001,00  | DA NE         | NE, jer dijametar odstupa za $1 \text{ mm} > 0,2 \text{ mm}$ |
| Bexios d.o.o.      | 20,20    | 1010,00  | DA NE         | DA   |
| Radionica „Kurbła” | 19,95    | 999,00   | DA NE         | DA   |

**3.6.** (a) Obračun za Hrastišin službeni put:

| Datum       | Sati na putu |
|-------------|--------------|
| 16.01.2024. | 4h           |
| 17.01.2024. | 24h          |
| 18.01.2024. | 24h          |
| 19.01.2024. | 24h          |
| 20.01.2024. | 11h          |

Vidimo da je Hrastiša na službenom putu proveo  $3 \cdot 24h + 15h$ , pa će mu, prema navedenim pravilima, biti isplaćene četiri dnevnice, odnosno, ukupno 6 400,00 din.

(b) Obračun za Javorčin službeni put:

| Datum       | Sati na putu |
|-------------|--------------|
| 26.02.2024. | 11h          |
| 27.02.2024. | 24h          |
| 28.02.2024. | 24h          |
| 29.02.2024. | 24h          |
| 01.03.2024. | 24h          |
| 02.03.2024. | 15h          |

← Pažnja! 2024. je prestupna godina!

Vidimo da je Javorka na službenom putu provela  $4 \cdot 24h + 26h = 5 \cdot 24h + 2h$ , pa će joj, prema navedenim pravilima, biti isplaćeno pet dnevnica, odnosno, ukupno 8 000,00 din.

**3.7.** Primitimo, prvo, da je Hrastiša zaradio više od \$100.000 jer se na zarade do \$100.000 plati najviše \$27.000 poreza (30% na sve preko \$10.000, što je maksimalno  $\$90.000 \cdot \frac{30}{100} = \$27.000$ ). Zato prilikom obračuna poreza na Hrastišinu zaradu primenjena poslednja formula, pa dobijamo da je:

$$\$90.000 \cdot 30\% + (z - \$100.000) \cdot 60\% = \$87.000,$$

gde je  $z$  Hrastišina zarada u prošloj godini. Rešimo gornju jednačinu po  $z$ :

$$\$27.000 + (z - \$100.000) \cdot \frac{60}{100} = \$87.000$$

$$(z - \$100.000) \cdot \frac{60}{100} = \$60.000$$

$$z - \$100.000 = \$60.000 \cdot \frac{100}{60}$$

$$z - \$100.000 = \$100.000$$

$$z = \$200.000$$

Hrastiša je u prošloj godini zaradio \$200.000.

**3.8.** Pretvorićemo prvo dužinu jahte u inče:

- $138 \text{ jardi} = 138 \cdot 3 \text{ stope} = 414 \text{ stopa} = 414 \cdot 12 \text{ inča} = 4968 \text{ inča};$
- $2 \text{ stope i } 8 \text{ inča} = 2 \cdot 12 + 8 \text{ inča} = 32 \text{ inča}.$

Dakle, ukupna dužina jahte u inčima je  $4968 + 32 = 5000$ . Sada ćemo 5000 inča konvertovati u metre:

$$\frac{5000 \cdot 2,54 \text{ cm}}{100} = \frac{12700 \text{ cm}}{100} = 127 \text{ m}.$$

Jahta je dugačka 127 m.

**3.9.** Reč BIOINFORMATIKA ima 14 slova. Ona je ispisana na ekran 100 puta bez razmaka. Dakle, na ekran je ispisati 1400 simbola. Pošto u jedan red staje 80 simbola, podelićemo celobrojno 1400 sa 80, pa dobijamo da je količnik 17 i ostatak 40. Drugim rečima:

$$1400 = 17 \cdot 80 + 40.$$

(a) Program je ispisao ukupno 18 redova: 17 punih redova ( $17 \cdot 80$ ), i još 40 simbola u 18. redu.

(b) U poslednjem, 18. redu, ima 40 slova. Kako reč BIOINFORMATIKA ima 14 slova, poslednji red sadrži poslednjih 12 slova reči BIOINFORMATIKA i još dva puta celu reč:

$$\underbrace{\text{OINFORMATIKABIOINFORMATIKABIOINFORMATIKA}}_{\substack{12 \quad 14 \quad 14}}$$

**3.10.** Od 150 učenika u generaciji niko nije dobio ocenu 1, 42 učenika su dobila ocenu 2, a 48 učenika je dobilo ocenu 3. Dakle, 90 učenika je dobilo ocenu 2 ili 3, što znači da je preostalih 60 učenika dobilo ocenu 4 ili 5. Neka je njih  $k$  dobilo ocenu 5, a  $60 - k$  ocenu 4. Prosečna ocena generacije se tada izražava sledećim izrazom:

$$\frac{2 \cdot 42 + 3 \cdot 48 + 4(60 - k) + 5k}{150}.$$

Treba da odredimo  $k$  koje će garantovati da je prosečna ocena generacije barem 3,5. Zato treba rešiti nejednačinu:

$$\frac{2 \cdot 42 + 3 \cdot 48 + 4(60 - k) + 5k}{150} \geq 3,5.$$

Rešavanjem ove nejednačine dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 42 + 3 \cdot 48 + 4(60 - k) + 5k}{150} &\geq 3,5 \\ 2 \cdot 42 + 3 \cdot 48 + 4(60 - k) + 5k &\geq 3,5 \cdot 150 \\ 84 + 144 + 240 + k &\geq 525 \\ k &\geq 57. \end{aligned}$$



Dakle, barem 57 učenika u generaciji treba da dobije ocenu 5 da bi prosek cele generacije bio barem 3,5.

**3.11.** Neka je  $x$  iznos novca koji će kompanija deponovati u banku,  $y$  iznos za koji će kupiti državne obveznice, a  $z$  iznos koji će uložiti u akcije. Pošto kompanija želi da uloži tačno 120.000 EUR na jedan od ova tri načina, mora biti

$$x + y + z = 120\,000.$$

Kako novac deponovan u banku donosi 2% dobiti godišnje, obveznice donose 5% godiv snje, a akcije čak 9% i kako kompanija želi da na ovaj način godišnje zaradi 5.500 EUR, mora biti:

$$\frac{2}{100}x + \frac{5}{100}y + \frac{9}{100}z = 5\,500.$$

Konačno, kompanija želi da uloži dva puta više novca u banku uloži nego u akcije, pa je:

$$x = 2z.$$

Ako  $x = 2z$  uvrstimo u prve dve jednačine dobijamo ovakav sistem jednačina:

$$y + 3z = 120\,000 \quad \text{i} \quad \frac{5}{100}y + \frac{13}{100}z = 5\,500,$$

odnosno,

$$y + 3z = 120\,000 \quad \text{i} \quad 5y + 13z = 550\,000.$$

Iz prve jednačine je  $y = 120\,000 - 3z$ , pa uvrštavanjem u drugu dobijamo:

$$5(120\,000 - 3z) + 13z = 550\,000$$

$$600\,000 - 15z + 13z = 550\,000$$

$$2z = 50\,000$$

$$z = 25\,000.$$

Dakle, u akcije treba uložiti  $z = 25\,000$  EUR, u državne obveznice  $y = 120\,000 - 3z = 45\,000$  EUR, a u banku treba deponovati  $x = 2z = 50\,000$  EUR.

**3.12.** Neka je  $M$  cena minuta razgovora sa Mađarskom,  $A$  cena minuta razgovora sa Austrijom, a  $N$  cena minuta razgovora sa Nemačkom. Tada podacima iz tabele

| Mesec     | Razgovori sa<br>Mađarskom<br>(min) | Razgovori sa<br>Austrijom<br>(min) | Razgovori sa<br>Nemačkom<br>(min) | Račun<br>(din) |
|-----------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|----------------|
| Septembar | 90                                 | 120                                | 180                               | 2520           |
| Oktobar   | 70                                 | 100                                | 120                               | 1840           |
| Novembar  | 50                                 | 110                                | 150                               | 2060           |

odgovara sledeći sistem jednačina:

$$90M+120A+180N = 2520$$

$$70M+100A+120N = 1840$$

$$50M+110A+150N = 2060$$

Sistem možemo znatno pojednostaviti tako što ćemo prvu jednačinu podeliti sa 30, a drugu i treću sa 10:

$$3M+ 4A+ 6N = 84$$

$$7M+10A+12N = 184$$

$$5M+11A+15N = 206$$

Sistem ćemo rešiti Gausovom metodom eliminacije. Ako prvu jednačinu pomnožimo sa  $-2$  i dodamo drugoj, dobijamo:

$$3M+ 4A+ 6N = 84$$

$$M+ 2A = 16$$

$$5M+11A+15N = 206$$

Druga jednačina je sada “najlepša”, pa ćemo je prebaciti na prvo mesto i njom eliminisati promenljivu  $M$  iz ostalih jednačina sistema:

$$M+2A = 16$$

$$-2A+ 6N = 36$$

$$A+15N = 126$$

Sada je treća jednačina “lepša” od poslednje dve, pa ćemo je dovesti na drugo mesto i njom eliminisati  $A$  iz one druge:

$$M+2A = 16$$

$$A+15N = 126$$

$$36N = 288$$

Iz poslednje jednačine je  $N = 8$ , iz pretposlednje je  $A = 126 - 15N = 6$  i iz prve je  $M = 16 - 2A = 4$ .

Dakle, Hrastiši su razgovore sa Mađarskom naplaćivali 4 din/min (umesto obećanih 3), razgovore sa Austrijom su mu naplaćivali 6 din/min (umesto obećanih 5), a razgovore sa Nemačkom su mu naplaćivali 8 din/min (umesto obećanih 7).

**4.1.** Neka je  $d$  rastojanje tačke  $C$  od baze  $A$ . Iz pravoulog trougla  $ACI$  ( $I$  je teme trougla u kome se nalazi helikopter *Ingenuity*) imamo da je

$$\frac{d}{200 m} = \text{kotangens elevacionog ugla} = \text{ctg } 9^\circ 50'.$$

Iz priložene tabele vidimo da je  $\text{ctg } 9^\circ 50' = 5,769$  i tako dobijamo:

$$d = 5,769 \cdot 200 m = 1153,8 m.$$

**4.2.** Neka je  $d$  rastojanje tačke  $C$  od baze  $A$ . Iz pravouglog trougla  $ABC$  imamo da je

$$\frac{d}{1000\text{ m}} = \operatorname{tg} \angle ABC = \operatorname{tg}(90^\circ - 9^\circ 50') = \operatorname{tg} 80^\circ 10'.$$

Iz priložene tabele vidimo da je  $\operatorname{tg} 80^\circ 10' = 5,769$  i tako dobijamo:

$$d = 5,769 \cdot 1000\text{ m} = 5\,769\text{ m}.$$

**4.3.** Rešenje ovog zadatka se svodi na to da se dva puta primeni ideja Zadatka 4.2. Neka je  $d_1$  rastojanje broja od luke prilikom prvog posmatranja, a  $d_2$  rastojanje broda od luke prilikom drugog posmatranja. Za prvo posmatranje imamo da je

$$\frac{d_1}{100\text{ m}} = \operatorname{tg}(90^\circ - 5^\circ) = \operatorname{tg} 85^\circ = 11,43,$$

i zato je

$$d_1 = 100\text{ m} \cdot 11,43 = 1\,143\text{ m}.$$

Za drugo posmatranje imamo da je

$$\frac{d_2}{100\text{ m}} = \operatorname{tg}(90^\circ - 20^\circ 30') = \operatorname{tg} 69^\circ 30' = 2,67,$$

i zato je

$$d_2 = 100\text{ m} \cdot 2,67 = 267\text{ m}.$$

Prema tome, između ova dva osmatranja brod je prešao rastojanje od  $d_1 - d_2 = 1\,143\text{ m} - 267\text{ m} = 876\text{ m}$ .

**4.4.** Neka je  $D$  tačka u kojoj se nalazi drvo,  $H$  tačka u kojoj se nalazi Hrastiša,  $J$  tačka u kojoj se nalazi Javorka, a  $E$  podnožje normale iz  $D$  na pravu  $HJ$ . Neka je  $|EJ| = x$ . Tada je  $|EH| = 50 - x$  jer Javorka i Hrastiša stoje na rastojanju od 50 m. Neka je  $s = |DE|$  širina reke. Tada iz pravougljih trouglova  $DEH$  i  $DEJ$ , konsultujući pri tome priloženu tabelu, vidimo da je

$$\frac{s}{50 - x} = \operatorname{tg} 63^\circ 26' 6'' = 2$$

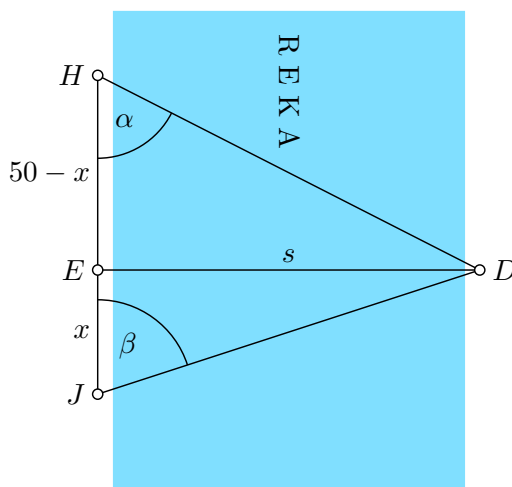
i

$$\frac{s}{x} = \operatorname{tg} 71^\circ 33' 54'' = 3.$$

Drugim rečima, dobijamo sistem jednačina

$$s = 2 \cdot (50 - x) \quad \text{i} \quad s = 3x,$$

čije rešenje je  $x = 20$  i  $s = 60$ . Prema tome, reka je široka 60 m.



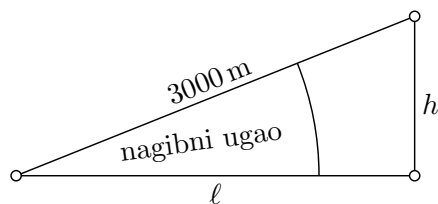
4.5. Kako je u zadatku navedeno, u ovoj situaciji je kosinus nagibnog ugla približno jednak 1, što znači da je

$$\frac{\ell}{3000\text{ m}} \approx 1.$$

Odatle zaključujemo da je  $\ell \approx 3000\text{ m}$ . Kako se radi o nagibu od 3% dobijamo da je

$$\frac{h}{\ell} = \frac{3}{100},$$

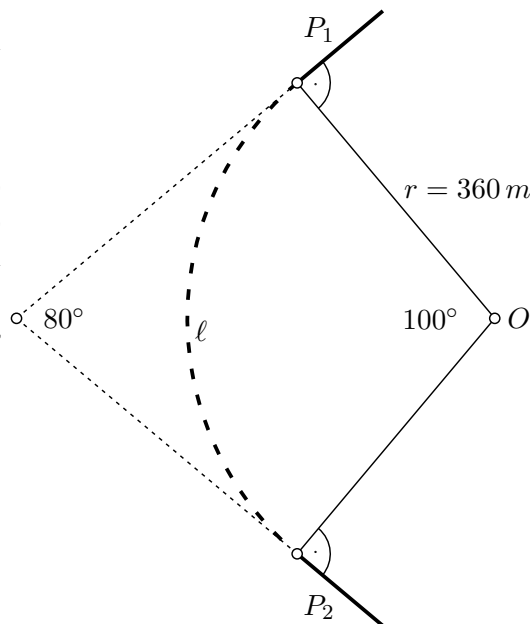
pa kako je  $\ell \approx 3000\text{ m}$  sledi da je  $h \approx \frac{3}{100} \cdot 3000\text{ m} = 90\text{ m}$ . Dakle, automobil je savladao visinu od približno 90 m.



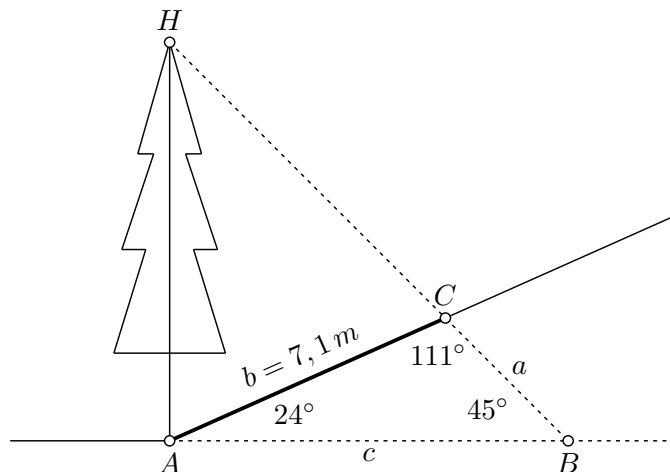
4.6. Da bi voz mogao “glatko” da uđe u krivinu (i iz nje da izađe) kružni luk kojim se krakovi spajaju mora biti deo kruga na koga su krakovi tangentni. To znači da su u četvorouglu na slici uglovi kod tačaka  $P_1$  i  $P_2$  pravi, pa kako je ugao kod trećeg temena jednak  $80^\circ$ , sledi da je ugao kod  $O$  jednak  $100^\circ$ . Dakle, radi se o kružnom luku na krugu poluprečnika  $r = 360\text{ m}$  koji odgovara centralnom uglu od  $100^\circ$ . Zato se dužina  $\ell$  ovog luka može odrediti ovako:

$$\begin{aligned} \ell &= \text{obim kruga} \cdot \frac{100^\circ}{360^\circ} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{100^\circ}{360^\circ} \\ &= 2 \cdot 360\text{ m} \cdot \pi \cdot \frac{100^\circ}{360^\circ} = 200 \cdot \pi \approx 628\text{ m}. \end{aligned}$$

Dužina luka koji spaja ova dva kraka pruge je približno 628 m.



4.7. Pošto u zadatku piše da drvo raste pravo u vis, trougao  $ABH$  na slici ispod je jednako-kraki pravougli sa pravim uglom kod temena  $A$ :



pa je visina drveta  $= |AH| = |AB|$ . Dužinu  $|AB|$  možemo odrediti iz trougla  $ABC$  na osnovu sinusne teoreme:

$$\frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}, \quad \text{odnosno} \quad \frac{7,1}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 111^\circ}.$$

Prema tome, uz pomoć podataka koji su navedeni u tabeli,

$$|AB| = c = \frac{7,1}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 111^\circ = \frac{7,1}{0,71} \cdot 0,93 = 10 \cdot 0,93 = 9,3 \text{ m}.$$

Drvo je visoko 9,3 m.

**5.1.** (a) Najmanji uvoz ima I - Idimidodija.

(b) Najveći izvoz ima N - Neoplantija.

(c) Najveći spoljnotrgovinski deficit ima M - Maketanija.

(d) Najveći spoljnotrgovinski suficit ima N - Neoplantija.

(e) Pošto se na  $x$ -osi grafika nalaze podaci o izvozu, a na  $y$ -osi grafika podaci o uvozu, država ima spoljnotrgovinski suficit ako za njene koordinate važi  $x > y$ , a ima spoljnotrgovinski deficit ako za njene koordinate važi  $x < y$ . Prema tome, one prve od ovih drugih razdvaja prava čija jednačina je  $y = x$ .

**5.2.** (a) Direktnim očitavanjem sa grafika vidimo da ako u reklamu uloži 600 000 dolara zarada kompanije će iznositi 4 000 000 dolara.

(b) Direktnim očitavanjem sa grafika vidimo sledeće: da bi zarada kompanije bila 3 000 000 dolara u reklamu treba uložiti najmanje 300 000 dolara.

(c) Sa grafika lako vidimo sledeće: ako je  $u = 300 000$  onda je  $z = 3 000 000$ , a ako je  $u = 600 000$  onda je  $z = 4 000 000$ . Zato parametri  $a$  i  $b$  zadovoljavaju sledeće veze:

$$300 000 \cdot a + b = 3 000 000$$

$$600 000 \cdot a + b = 4 000 000.$$

Da bismo rešili ovaj sistem jednačina možemo prvu jednačinu oduzeti od druge. Tako dobijamo:

$$300 000 \cdot a = 1 000 000$$

odakle je  $a = \frac{10}{3}$ . Kada ovu vrednost za  $a$  uvrstimo u prvu jednačinu dobijamo

$$300 000 \cdot \frac{10}{3} + b = 3 000 000,$$

odakle je  $b = 2 000 000$ . Dakle, formula koja opisuje ovaj proces je data sa

$$z = \frac{10}{3} \cdot u + 2 000 000.$$

**5.3.** Označimo sa  $x$  broj aknuta, a sa  $y$  broj blambova koje ekspedicija treba da ponese na Zemlju. Da bi blambovi imali dovoljno zedorona, mora biti

$$3x \geq 5y,$$

jer jedan aknut proizvodi 3 ml zedorona dnevno, dok jedan blamb popije 5 ml zedorona dnevno. Kako je količina mikulaksa ograničena na 2 litre dnevno, što je 2000 ml dnevno, i kako

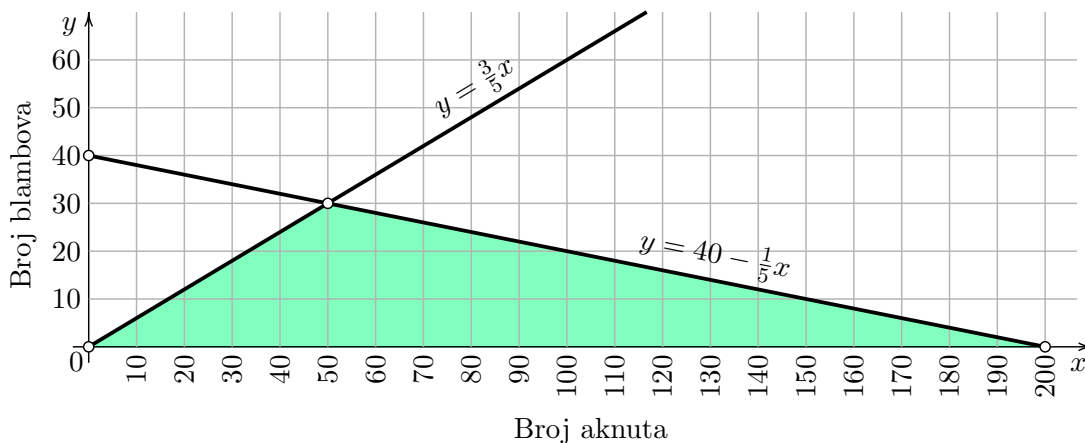
jedan aknut popije 10 ml mikulaksa dnevno, dok jedan blamb popije 50 ml mikulaksa dnevno, mora se voditi računa i o sledećem ograničenju:

$$10x + 50y \leq 2000.$$

Dva navedena ograničenja se mogu iskazati u sledećem, ekvivalentnom ali tehnički pogodnijem obliku:

$$y \leq \frac{3}{5}x \quad \text{i} \quad y \leq 40 - \frac{1}{5}x.$$

Deo koordinatne ravni koji zadovoljava obe nejednakosti osenčen je na sledećem dijagramu zelenom bojom:



Sa dijagrama se odmah vidi da pod navedenim ograničenjima ekspedicija na Zemlju može da ponese najviše 30 blambova, i za to im treba najmanje 50 aknuta da ih prehranjuju zedoronom.

**5.4.** Funkcija  $h(t)$  predstavlja visinu na kojoj se nalazi strela nakon  $t$  sekundi leta. Prema uslovima zadatka, nakon jedne sekunde od ispaljivanja strela je stigla do vrha kule koja je visoka 70 m što možemo zapisati ovako:

$$h(1) = 70, \text{ odnosno, } -\frac{1}{2}g + v_0 + h_0 = 70.$$

Nakon sedam sekundi od ispaljivanja strela je prošla pored prozora kroz koga je ispaljena, što možemo zapisati ovako:

$$h(7) = h_0, \text{ odnosno, } -\frac{1}{2}g \cdot 49 + 7v_0 + h_0 = h_0.$$

Jednu sekundu kasnije, dakle posle 8 sekundi leta, strela je pala na zemlju što znači da je

$$h(8) = 0, \text{ odnosno, } -\frac{1}{2}g \cdot 64 + 8v_0 + h_0 = 0.$$

Tako smo dobili sistem jednačina

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g + v_0 + h_0 &= 70 \\ -\frac{1}{2}g \cdot 49 + 7v_0 + h_0 &= h_0 \\ -\frac{1}{2}g \cdot 64 + 8v_0 + h_0 &= 0. \end{aligned}$$

Prvu i drugu jednačinu ćemo pomnožiti sa 2 da bismo se oslobodili razlomka, i primetićemo da se u drugoj jednačini potiru sabirci koji sadrže  $h_0$ . Tako doijamo:

$$\begin{aligned} -g + 2v_0 + 2h_0 &= 140 \\ -49g + 14v_0 &= 0 \\ -32g + 8v_0 + h_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ako treću jednačinu pomnožimo sa  $-2$  i dodamo prvoj dobijamo:

$$\begin{aligned} 63g - 14v_0 &= 140 \\ -49g + 14v_0 &= 0 \\ -32g + 8v_0 + h_0 &= 0. \end{aligned}$$

Konačno, sabiranjem prve i druge jednačine dobijamo  $14g = 140$ , odakle je  $g = 10$ . Tako smo izračunali gravitaciono ubrzanje Mordora.

Iako smo rešili zadatak onog trenutka kada smo izračunali  $g$ , iz čiste radoznalosti izračunaćemo još i početnu brzinu strele  $v_0$ , kao i visinu  $h_0$  na kojoj se nalazi prozor sa koga je strela ispaljena. Iz druge jednačine je  $14v_0 = 490$ , pa je  $v_0 = \frac{490}{14} = 35$  m/s. Konačno,

$$h_0 = 70 - v_0 + \frac{1}{2}g = 40 \text{ m}.$$

**5.5.** (a) Direktnim očitavanjem sa grafika vidimo da se po ceni od 1400 din može prodati 2000 komada proizvoda.

(b) Direktnim očitavanjem sa grafika vidimo da ukoliko želimo da prodamo bar 3000 komada proizvoda cena ne može biti veća od 1200 din.

(c) Direktnim očitavanjem sa grafika vidimo da je  $f(1000) = 6000$  i da je  $f(2000) = 1000$ . Tako dobijamo sistem:

$$\frac{a}{1000 - b} = 6000 \quad \text{i} \quad \frac{a}{2000 - b} = 1000.$$

Odatle je:

$$a = 6000(1000 - b) = 6\,000\,000 - 6000b \quad \text{i} \quad a = 1000(2000 - b) = 2\,000\,000 - 1000b.$$

Izjednačavanjem po  $a$  dobijamo  $6\,000\,000 - 6000b = 2\,000\,000 - 1000b$ , odnosno,  $4\,000\,000 = 5000b$ , pa je  $b = 800$ . Ako ovu vrednost za  $b$  uvrstimo u bilo koju od dve početne jednačine, recimo u prvu, dobijamo  $\frac{a}{200} = 6000$  pa je  $a = 1\,200\,000$ . Zato je  $f(x) = \frac{1\,200\,000}{x - 800}$ .

**5.6.** Ako se kompanija “Frula&Opanak Ltd” odluči za izgradnju sopstvenog pogona onda se troškovi proizvodnje  $n$  komada suvenira mogu opisati funkcijom

$$f(n) = 100\,000 + 4n.$$

S druge strane, ako se kompanija “Frula&Opanak Ltd” odluči da autsorsuje proizvodnju onda će  $n$  komada suvenira nabavljati po ceni koja se može opisati funkcijom

$$g(n) = 14n.$$

(a) Za 11 000 suveniru dobijamo:

$$f(11\,000) = 100\,000 + 4 \cdot 11\,000 = 144\,000$$

$$g(11\,000) = 14 \cdot 11\,000 = 154\,000.$$

Dakle, za 11 000 suveniru kompaniji “Frula&Opanak Ltd” isplativije je da napravi sopstveni pogon.

(b) Za 8 000 suveniru dobijamo:

$$f(8\,000) = 100\,000 + 4 \cdot 8\,000 = 132\,000$$

$$g(8\,000) = 14 \cdot 8\,000 = 112\,000.$$

Dakle, za 8 000 suveniru kompaniji “Frula&Opanak Ltd” isplativije je da autorsuje proizvodnju.

(c) Treba da nađemo broj suveniru  $n$  za koga je  $f(n) = g(n)$ . Tako dobijamo jednačinu

$$100\,000 + 4n = 14n$$

čijim rešavanjem se dobija  $n = 10\,000$ .



## 6.1. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
    while True:
        n = int(input())
        if n >= p and n <= q: return n
        print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# Ubacuje element u listu koja sadrzi tri do sada najvece vrednosti
def Ubaci(x, m):
    if x > m[0]:          m[2], m[1], m[0] = m[1], m[0], x
    elif m[0] > x > m[1]: m[2], m[1] = m[1], x
    elif m[1] > x > m[2]: m[2] = x

# === Glavni program ===
print("Unesi duzinu niza (od 1 do 50): ", end="")
K = UcitajIzIntervala(1, 50)
# Ovde ce biti smesteni maksimumi tako da je m[0] > m[1] > m[2]
m = [-1, -1, -1]
for i in range(K):
    print("Unesi " + str(i+1) + ". broj (od 1 do 9999): ", end="")
    x = UcitajIzIntervala(1, 9999)
    Ubaci(x, m)
if m[2] == -1: print("U nizu ne postoje tri razlicita broja")
else: print(m[0], m[1], m[2])
```

## 6.2. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
    while True:
        n = int(input())
        if n >= p and n <= q: return n
        print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# Racuna zbir cifrara broja n
def ZbirCif(n):
    sum = 0
    while n > 0:
        sum += n%10
        n //= 10
    return sum

# === Glavni program ===
print("Unesi duzinu niza (od 1 do 50): ", end="")
K = UcitajIzIntervala(1, 50)
# Ovde ce biti smesteni elementi niza
a = []
for i in range(K):
    print("Unesi " + str(i+1) + ". broj (od 1 do 9999): ", end="")
    x = UcitajIzIntervala(1, 9999)
    a.append(x)
nasao_bar_jedan = False
for x in a:
    if ZbirCif(x) >= 10:
        print(x)
        nasao_bar_jedan = True
if not nasao_bar_jedan: print("Nema takvih brojeva")
```

### 6.3. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
    while True:
        n = int(input())
        if n >= p and n <= q: return n
        print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# Vraca listu svih cifara broja n
def SveCifreBroja(n):
    L = []
    while n > 0:
        L.append(n % 10)
        n //= 10
    L.reverse()
    return L

# === Glavni program ===
while True:
    print("Unesite petocifreni broj: ", end="")
    broj = UcitajIzIntervala(10000, 99999)
    sve_cifre = SveCifreBroja(broj)
    prosek = sum(sve_cifre) / len(sve_cifre)
    cifre = [x for x in sve_cifre if x > prosek]
    print(cifre)
    print("Da li zelite jos? [d/n]: ", end="")
    odgovor = input()
    if odgovor == "n" or odgovor == "N": break
```

#### 6.4. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
    while True:
        n = int(input())
        if n >= p and n <= q: return n
        print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# Ucitava od korisnika prirodan broj.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese odgovarajucu vrednost.
def UcitajPrirodan():
    while True:
        n = int(input())
        if n >= 1: return n
        print("Greska: Nije prirodan broj! Ponovi unos!")

# Vraca prvu cifru broja n
def PrvaCifra(n):
    while n > 9: n //= 10
    return n

# === Glavni program ===
while True:
    print("Unesite broj izmedju 5 i 1000: ", end="")
    N = UcitajIzIntervala(5, 1000)
    L = []
    for i in range(N):
        print("Unesi " + str(i+1) + ". prirodan broj: ", end="")
        x = UcitajPrirodan()
        L.append(x)
    k = PrvaCifra(N)
    b = [x for x in L if x % k == 0]
    print(b)
    print("Da li zelite jos? [d/n]: ", end="")
    odgovor = input()
    if odgovor == "n" or odgovor == "N": break
```

## 6.5. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
    while True:
        n = int(input())
        if n >= p and n <= q: return n
        print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# === Glavni program ===
while True:
    print("Unesite broj izmedju 10 i 1000: ", end="")
    N = UcitajIzIntervala(10, 1000)
    L = []
    for i in range(N):
        print("Unesi " + str(i+1) + ". realan broj: ", end="")
        x = float(input())
        L.append(x)
    prosek = sum(L) / len(L)
    for i in range(N):
        if 2 * L[i] < prosek: L[i] = 0
    print(L)
    print("Da li zelite jos? [d/n]: ", end="")
    odgovor = input()
    if odgovor == "n" or odgovor == "N": break
```

## 6.6. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika prirodan broj.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese odgovarajucu vrednost.
def UcitajPrirodan():
    while True:
        n = int(input())
        if n >= 1: return n
        print("Greska: Nije prirodan broj! Ponovi unos!")

# Vraca listu svih cifara broja n
def SveCifreBroja(n):
    L = []
    while n > 0:
        L.append(n % 10)
        n //= 10
    L.reverse()
    return L

# === Glavni program ===
print("Unesite prirodan broj: ", end="")
N = UcitajPrirodan()
cifre = SveCifreBroja(N)
cifre3 = [c for c in cifre if c > 3]
if len(cifre3) < 2: print("Nema dve cifre vece od 3")
else: print(cifre3[1])
```

## 6.7. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
    while True:
        n = int(input())
        if n >= p and n <= q: return n
        print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# Vraca prvu cifru broja n
def PrvaCifra(n):
    while n > 9: n //= 10
    return n

# === Glavni program ===
print("Unesite broj izmedju 1 i 50: ", end="")
N = UcitajIzIntervala(1, 50)
L = []
for i in range(N):
    print("Unesi " + str(i+1) + ". prirodan broj do 9999: ", end="")
    x = UcitajIzIntervala(1, 9999)
    L.append(x)
b = [x for x in L if PrvaCifra(x) == x % 10]
print(b)
```