Primeri zadataka za prijemni ispit iz matematike i informatike za studente informatike i bioinformatike

(V1.4 sa ispravkama, dopunama i rešenjima)

dr Dragan Mašulović, dr Vladimir Kurbalija

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu

Departman za matematiku i informatiku

Trg Dositeja Obradovića 3, 21000 Novi Sad

email: {dragan.masulovic,vladimir.kurbalija}@dmi.uns.ac.rs

20. februar 2025.

Sadržaj

Predgovor

Ovo je zbirka zadataka za pripremu prijemnog ispita za upis na studijske programe osnovnih studija informatike i bioinformatike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu.

Gradivo koje dolazi u obzir za prijemni ispit iz ovog dela obuhvata sledeće teme:

- *Logika:* Logički veznici, iskazne formule, tautologije; kvantifikatori.
- *Elementi kombinatorike:* prebrojavanje nizova simbola (varijacije, permutacije); prebrojavanje delegacija (kombinacije bez ponavljanja); princip uključenja-isključenja za dva i tri svojstva.
- *Brojevi:* celi, racionalni i realni brojevi; procentni račun; apsolutna vrednost realnog broja; približne vrednosti; razmere i proporcije.
- *Linearne jednačine i nejednačine:* linearne jednačine sa jednom promenljivom; linearne nejednačine sa jednom promenljivom; sistemi dve i tri linearne jednačine sa dve, odnosno, tri nepoznate.
- *Trigonometrija pravog ugla:* osnovne trigonometrijske funkcije oštrog ugla i njihove osnovne osobine, sinusna i kosinusna teorema.
- *Realne funkcije i njihovi grafici:* funkcija $y = ax+b$; očitavanje vrednosti komplikovanije realne funkcije sa njenog grafika; kvadratna jednačina i kvadratna funkcija.
- *Programiranje:* Struktura i delovi programa, prosti tipovi podataka, unos i ispis, naredba dodele, izrazi, uslovne naredbe, petlje, funkcije/procedure/metodi, nizovi/liste.

Napomena:

1. Prilikom izrade zadataka iz matematike dozvoljena je upotreba samo kalkulatora.

2. Prilikom izrade zadatka iz programiranja može se koristiti programski jezik po izboru.

Bićemo zahvalni svima koji nam ukažu na bilo kakvu vrstu grešaka u tekstu, od tipografskih do suštinskih!

Autori

Verzije dokumenta

V1.4 30.11.2024. Unete ispravke koje je predložila Katedra za računarske nauke
V1.3 22.09.2024. Dodati novi zadaci
V1.2 22.06.2024. Ispravljeno rešenje Zadatka 2.11 (hvala Sofiji Minić!)
V1.1 13.05.2024. Dodata rešenja zadataka
V1.0 02.04.2024. Prva verzija zbirke

1 Logika

Zadatak 1.1 Jedan mali program ima četiri celobrojne promenljive: a, b, c i d. Nakon završetka programa stanje u memoriji računara je izgledalo ovako:

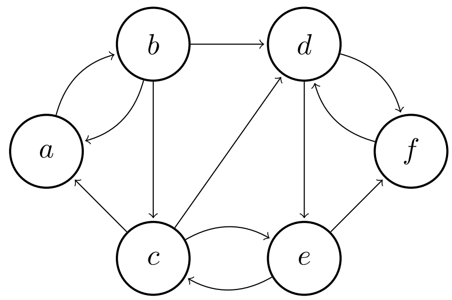
Memorija

a:	6
b:	9
c:	-3
d:	0

Neka je $P = \{a, b, c, d\}$ skup promenljivih ovog programa. U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** pored tačnih iskaza, odnosno **NE** pored netačnih iskaza:

Iskaz	Iskaz je tačan?	
$a + b + c + d = a + b + c$	DA	NE
$a > 0 \wedge b > 0$	DA	NE
$c < 0 \vee d < 0$	DA	NE
$(\forall x \in P)\ x$ je deljiv sa 3	DA	NE
$(\exists x \in P)\ x > 9$	DA	NE
$(\forall x \in P)(\forall y \in P)\ x + y \geqslant 3$	DA	NE
$(\forall x \in P)(\exists y \in P)\ x \cdot y \geqslant 0$	DA	NE

Zadatak 1.2 Država Jednosmerija ima šest gradova: a, b, c, d, e i f, i svi putevi između gradova su jednosmerni:



Pišemo $x \to y$ ako postoji direktan put od grada x do grada y. Recimo, $c \to a$ jer postoji direktan put od c do a, ali *nije* $a \to c$ jer ne postoji direktan put od a do c. Pored toga, pišemo $x \rightsquigarrow y$ ako se od grada x do grada y može stići direktno ili preko nekih drugih gradova, ali poštujući jednosmerne puteve. Recimo, $c \rightsquigarrow d$ zato što su spojeni direktnim putem, ali i $a \rightsquigarrow c$ jer se od a do c može stići preko grada b poštujući jedosmerne puteve.

Neka je $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ skup gradova države Jednosmerije. U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** pored tačnih iskaza, odnosno **NE** pored netačnih iskaza:

Iskaz	Iskaz je tačan?	
$a \to d$	DA	NE
$a \rightsquigarrow e$	DA	NE
$(\forall x \in G)(\exists y \in G)\ x \to y$	DA	NE
$(\forall x \in G)(\exists y \in G)(x \to y \vee y \to x)$	DA	NE
$(\exists x, y, z \in G)(x \to y \wedge y \to z \wedge z \to x)$	DA	NE
$(\forall x \in G)\ a \rightsquigarrow x$	DA	NE
$(\forall x \in G)(\forall y \in G)\ x \rightsquigarrow y$	DA	NE

Zadatak 1.3 Od slova A, C, T i G formiran je sledeći niz:

ACATGCACAAGTAATGGAGTAATGCAGTACATGCAGTAC

U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** pored tačnih iskaza, odnosno **NE** pored netačnih iskaza:

Iskaz	Iskaz je tačan?	
Za svako pojavljivanje slova A u nizu negde desno od njega se javlja slovo C	DA	NE
Za svako pojavljivanje slova G u nizu negde levo od njega se javlja slovo T	DA	NE
Slovo C se javlja u nizu češće nego slovo T	DA	NE
Slovo A je najfrekventnije slovo (tj. javlja se češće nego ostala slova u nizu)	DA	NE
U nizu se javlja kombinacija TGA	DA	NE
Postoji slovo C u nizu neposredno iza koga se javlja slovo G	DA	NE
Neposredno iza svake kombinacije GT uvek sledi slovo A	DA	NE

Zadatak 1.4 Od slova A, C, T i G formiran je sledeći niz:

C A T A C G T A T A C T A G

Za $X, Y \in \{A, C, T, G\}$ sa S_{XY} ćemo označiti sledeći iskaz:

> S_{XY}: za svako pojavljivanje slova X važi da se odmah desno do njega u navedenom nizu nalazi slovo Y;

a sa D_{XY} sledeći iskaz:

> D_{XY}: za svako pojavljivanje slova X važi da se negde u navedenom nizu desno od njega pojavljuje slovo Y.

U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** pored tačnih iskaza, odnosno **NE** pored netačnih iskaza:

Iskaz	Iskaz je tačan?	
S_{TA}	DA	NE
D_{CT}	DA	NE
S_{AT}	DA	NE
$S_{AT} \Rightarrow D_{GA}$	DA	NE
$(\exists X \in \{A, C, T, G\}) S_{AX}$	DA	NE
$(\forall X \in \{A, C, T, G\}) D_{XG}$	DA	NE

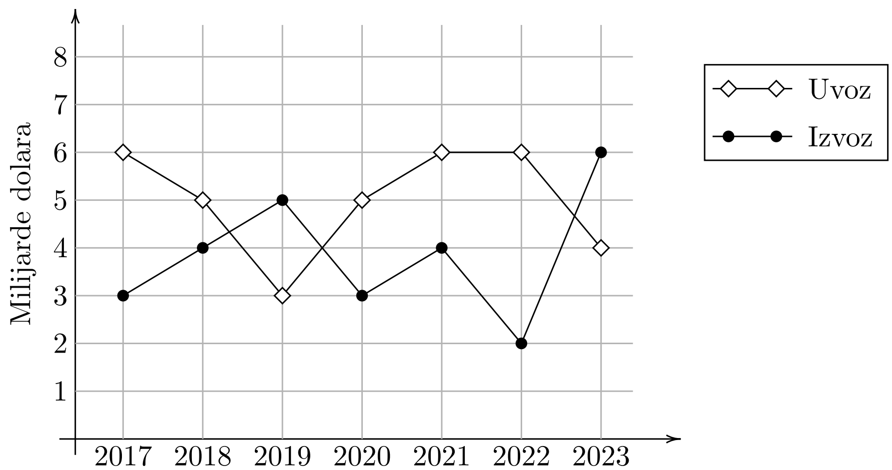
Zadatak 1.5 Potrošnja struje jednog domaćinstva tokom jedne kalendarske godine je prikazana sledećom tabelom:

Mesec	Potrošnja (kWh)	Mesec	Potrošnja (kWh)
JAN	309	JUL	242
FEB	291	AVG	257
MAR	257	SEP	263
APR	212	OKT	271
MAJ	229	NOV	285
JUN	231	DEC	297

U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** pored tačnih iskaza, odnosno **NE** pored netačnih iskaza:

Iskaz	Iskaz je tačan?	
U nekim mesecima je potrošnja prelazila 300 kWh	DA	NE
Potrošnja nikada nije padala ispod 200 kWh	DA	NE
Postoje dva meseca u kojima je potrošnja bila ista	DA	NE
U januaru je potrošnja bila veća od prosečne potrošnje za tu godinu	DA	NE
Postoji mesec u kome je potrošnja bila manja od medijalne potrošnje za tu godinu	DA	NE
Ukupna potrošnja u martu, aprilu i maju je bila veća nego ukupna potrošnja u septembru, oktobru i novembru	DA	NE
Prosečna dnevna potrošnja u januaru je bila veća od prosečne dnevne potrošnje u februaru	DA	NE

Zadatak 1.6 Na sledećem grafikonu je prikazan ukupan uvoz i ukupan izvoz države Kukurundije (u milijardama dolara) za period od 2017. do 2023. godine:



Kada država više potroši na uvoz nego što zaradi izvozom, kažemo da ima *spoljnotrgovinski deficit*. Obrnuto, ako država više zaradi izvozom nego što je potrošila na uvoz kažemo da ima *spoljnotrgovinski suficit*. Na primer, ova država je u 2018. godini imala spoljnotrgovinski deficit u visini od 1 milijarde dolara.

U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** pored tačnih iskaza, odnosno **NE** pored netačnih iskaza:

Iskaz	Iskaz je tačan?	
U poslednjoj godini navedenog perioda je Kukurundija imala najbolji izvozni rezultat od svih godina za koje su nam dati podaci	DA	NE
Postoji godina u posmatranom periodu kada je Kukurundija duplo više novca potrošila na uvoz nego što je zaradila izvozom	DA	NE
U nekim godinama navedenog perioda je Kukurundija imala spoljnotrgovinski suficit	DA	NE
U navedenom periodu je država Kukurundija češće imala spoljnotrgovinski suficit nego spoljnotrgovinski deficit	DA	NE
U navedenom periodu država Kukurundija nikada nije imala spoljnotrgovinski deficit veći od 5 milijardi dolara	DA	NE
U navedenom periodu je država Kukurundija više zaradila od izvoza nego što je potrošila na uvoz	DA	NE

Zadatak 1.7 Sudoku je logička igra za jednog igrača koja se igra na tabli 9×9 koja je dodatno podeljena na 9 manjih tabli 3×3 koje zovemo *kutije*. Cilj igre je da se sva polja table popune ciframa $1, 2, \ldots, 9$ tako da se u svakom redu, svakoj koloni i svakoj kutiji svaka od cifara $1, 2, \ldots, 9$ pojavljuje se tačno jednom. Na primer, u sledećoj tabli:

	kol 1	kol 2	kol 3	kol 4	kol 5	kol 6	kol 7	kol 8	kol 9
red 1	4	1	7	6	3	9	8	2	5
red 2	2	9	6		1	5	3	4	
red 3	5	8	3						
red 4	1	2							
red 5	3			4	7				9
red 6	9	B					1		
red 7	8	3		7		A	6		1
red 8	6								
red 9	7				2				

popunjeni su prvi red, prva kolona i kutija u gornjem levom uglu.

(a) Popuniti drugi red tabele: 2 9 6 $\square$ 1 5 3 4 $\square$

(b) Popuniti treći red tabele: 5 8 3 $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$

(c) Koju cifru treba upisati u polje označeno sa A (red 7, kolona 6)?

(d) Dokazati da u polju koje je označeno sa B (red 6, kolona 2) ne može da se nalazi cifra 4.

2 Kombinatorika

Zadatak 2.1 Osam drugara su kupili bioskopske karte za film „Openhajmer”. Dobili su sedišta 1, ..., 8 u V redu za projekciju koja počinje u 18h. Na koliko načina ovih osam drugara mogu da se rasporede na sedišta koja su dobili?

Zadatak 2.2 Osam drugara, među kojima su Javorka i Hrastiša, su kupili karte za bioskop. Dobili su sedišta 3, ..., 10 u IV redu. Na koliko načina ovih osam drugara mogu da se rasporede na sedišta koja su dobili, ali tako da Javorka i Hrastiša:

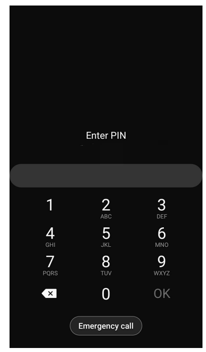
(a) sede jedno do drugog?

(b) *ne sede* jedno do drugog, jer su se nešto sporečkali?

Zadatak 2.3 Mama je Hrastiši stavila četvorocifreni pin na telefon. Koliko mogućnosti Hrastiša treba da isproba da bi „provalio” pin ako je, dok je virio mami preko ramena, Hrastiša video da su:

(a) sve cifre različite?

(b) postoje tačno dve jednake cifre?



Zadatak 2.4 Hrastiša je provalio mamin četvorocifreni pin, pa mu je mama ovaj put stavila šestocifreni pin na telefon. Koliko mogućnost Hrastiša treba da isproba da bi „provalio” pin ako je, dok je virio mami preko ramena, video da je mama za pin iskoristila tri puta cifru 8, dva puta cifru 6 i jednu cifru 3?

Zadatak 2.5 Na koliko načina se iz grupe od 5 biologa i 5 informatičara može odabrati delegacija od 3 naučnika u kojoj će obe struke biti zastupljene sa bar jednim predstavnikom?

Zadatak 2.6 DNK čine dva komplementarna lanca nukleotida. Svaki nukleotid se sastoji od jedne od četiri nukleotidne baze: A–adenin, C–citozin, G–guanin i T–timin. Nukleotidi se uvek javljaju u paru A—T i C—G.

(a) Na koliko načina se može kompletirati sledeći niz:

A—C—T—C—G—C—◯
| | | | | | |
T—G—A—G—C—G—A

(b) Na koliko načina se može kompletirati sledeći niz:

A—C—◯—◯—G—C—◯
| | | | | | |
T—◯—A—G—C—G—A

(c) Na koliko načina se može kompletirati sledeći niz:

A—C—T—C—◯—◯—◯
| | | | | | |
T—G—A—G—C—G—◯

(d) Na koliko načina se može kompletirati sledeći niz:

A—◯—T—C—◯—◯—◯
| | | | | | |
T—◯—A—G—C—G—◯

Zadatak 2.7 Registarske tablice u Bosni i Hercegovini se sastoje od tri cifre, jednog slova i još tri cifre, pri čemu prva cifra nije nula, a kao slovo se može pojaviti samo jedno od sledećih slova: A, E, J, K, M, O, T. Na primer, 103-T-010 je dobra registarska oznaka, dok 099-A-731 i 103-C-010 to nisu. Koliko različitih registarskih oznaka se može formirati na ovaj način?

Zadatak 2.8 Koliko ima prirodnih brojeva u čijem decimalnom zapisu nema jednakih cifara i čije cifre pripadaju skupu $\{1, 3, 5, 7\}$?

Zadatak 2.9 Automobilske registarske tablice u jednoj zemlji se sastoje od 3 cifre iza kojih slede 2 slova engleske abecede (ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXZY). Pri tome, prva cifra ne sme biti 0. Koliko se različitih registarskih tablica može formirati na ovaj način?

Zadatak 2.10 Registarski broj automobila u jednoj državi se sastoji iz dva slova engleske abecede (ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXZY) iza kojih se nalazi šest cifara. Pri tome, prva cifra ne može biti nula. Koliko različitih registracija se može napraviti?

Zadatak 2.11 Koliko ima desetocifrenih brojeva kojima su sve cifre različite, kojima na prvom mestu stoji parna cifra, a na poslednja dva neparna cifra. (Napomena: Na prvom mestu ne sme stajati nula!)

Zadatak 2.12 Četiri bračna para čine grupu od 8 osoba. Na koliko različitih načina može od članova ove grupe da se formira tročlana komisija ako:
(a) u komisiji mogu da budu bilo koja tri od osam članova;
(b) u komisiji mogu da budu dve žene i jedan muškarac;
(c) u komisiji ne mogu istovremeno da budu muž i žena.

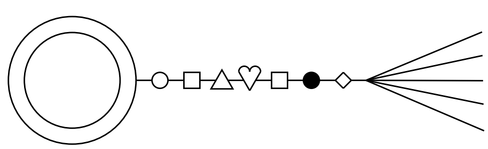
Zadatak 2.13 Telefonski broj u gradu Kukugradu može biti petocifren ili šestocifren i ne sme početi ciframa 0, 1 i 9. Koliko različitih telefonskih brojeva može biti u tom gradu?

Zadatak 2.14 Neka je $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$ skup od 26 slova engleske abecede. Koliko različitih reči dužine 5 se može sastaviti od ovih 26 slova, ako se zahteva da prvo i peto slovo budu različiti samoglasnici (a, e, i, o, u), dok su ostala tri slova bilo koji (ne nužno različiti) suglasnici?

Zadatak 2.15 Koliko ima različitih skupova od po 5 prirodnih brojeva od $1, \ldots, 100$ takvih da je zbir elemenata svakog od njih paran broj?

Zadatak 2.16 Koliko ima permutacija cifara 1, 2, 3, …, 9 u kojima nije 1 ispred 2?

Zadatak 2.17 Javorka je kupila šest tipova perlica $\bigcirc$, $\bullet$, $\triangle$, $\square$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, od svake vrste više nego dovoljno, kako bi pravila priveske za ključeve. Svaki privezak se sastoji od sedam perlica, recimo ovako:



(a) Koliko različitih tipova privezaka može da se napravi? (Dva tipa privezaka smatramo različitim ako su nizovi perlica različiti.)
(b) Koliko različitih tipova privezaka može da se napravi samo od perlica $\bigcirc$ i $\bullet$?
(c) Koliko ima tipova privezaka kojima su $\heartsuit\heartsuit\heartsuit$ poslednje tri perlice? (Perlica $\heartsuit$ može da se nalazi i ranije u nizu, važno je samo da se niz završava sa tri srca.)

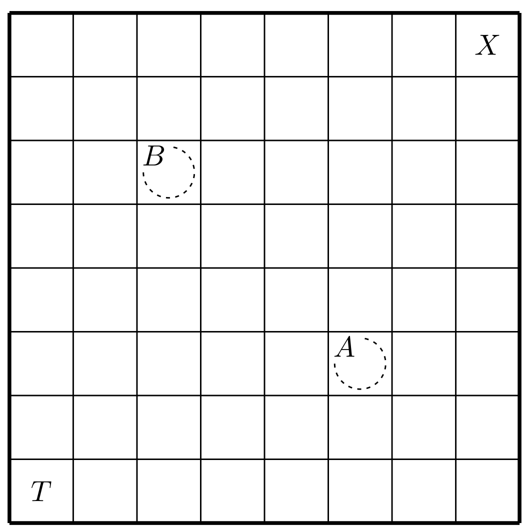
(d) Koliko ima tipova privezaka kod kojih se perlica $\triangle$ javlja tačno dva puta: jednom na početku i jednom na kraju?

(e) Koliko različitih tipova privezaka može da se napravi od tri perlice $\square$ i četiri perlice $\diamondsuit$?

Zadatak 2.18 U jednoj komisiji Evropske unije nalazi se 9 Nemaca, 11 Francuza i 8 Belgijanaca. Nemci u ovoj grupi govore i razumeju samo nemački jezik, Francuzi govore i razumeju samo francuski jezik, dok Belgijanci iz ove grupe tečno govore i razumeju i nemači i francuski jezik. Na koliko načina se od ovih 28 ljudi može odabrati radno telo od 12 članova za čiji rad nije potreban prevodilac?

Zadatak 2.19 Svaki od 62 superheroja koji čine grupu *Sitni osvetnici* (engl. Petty Avengers) ima bar jednu od ove tri osobine: nadljudska snaga, mogućnost telekineze i neverovatna brzina. Neki od Sitnih osvetnika imaju tačno jednu od ovih osobina, neki tačno dve, a neki i sve tri. Nadljudsku snagu ima 27 Sitnih osvetnika, mogućnost telekineze 25 Sitnih osvetnika, a neverovatnu brzinu čak 33 Sitna osvetnika. Ako se zna da 15 Sitnih osvetnika, ni manje ni više, ima tačno dve od ovih osobina, koliko Sitnih osvetnika ima sve tri osobine?

Zadatak 2.20 Pokvareni top je šahovska figura koja može da se kreće samo u dva pravca: nadesno i nagore. Pokvareni top se nalazi u donjem levom uglu šahovske table 8×8 (polje označeno sa T na slici ispod) i treba da stigne to gornjeg desnog polja (polje označeno sa X na slici ispod):



(a) Na koliko različitih načina pokvareni top može da stigne od pozicije na kojoj se nalazi do polja označenog sa X?

(b) Na koliko različitih načina pokvareni top može da stigne od pozicije na kojoj se nalazi do polja označenog sa X, ali da pri tome *obavezno prođe kroz polje* označeno sa A?

(c) Na koliko različitih načina pokvareni top može da stigne od pozicije na kojoj se nalazi do polja označenog sa X, ali da pri tome *nipošto ne prođe kroz polje* označeno sa B?

3 Brojevi i jednačine

Zadatak 3.1 Kada se u prodavnici kupuju osnovne životne namirnice (kao što su hleb i mleko) u cenu koju platimo na kasi je uračunat porez od 10%, a kada se kupuju proizvodi koji ne spadaju u osnovne životne namirnice (kao što je čokolada) u cenu koju platimo na kasi je uračunat porez od 20%. Novac koji se naplati od kupaca na ime poreza se sliva u budžet. Hrastiša je kupio jedan litar mleka i jednu čokoladu. Platio je ukupno 590 dinara, i to 110 dinara za mleko i 480 dinara za čokoladu. Koliko novca od ove prodaje će otići u budžet?

Zadatak 3.2 Kada se iz inostranstva uvozi roba u Republiku Srbiju prvo se na nabavnu cenu zaračuna carina od 10%, a onda se na tako ocarinjeni proizvod (dakle na iznos koji se dobija kada se saberu osnovna cena i carina) zaračuna još i porez od 20%. Gejmerska kompanija „Javorka i sinovi" uvozi u Srbiju gejming konzole „Oakenshield" čija nabavna cena je 5000 dinara za jednu konzolu. Koliko će ovog uvoznika koštati jedna konzola nakon carinjenja i plaćanja poreza?

Zadatak 3.3 Prema standardima postignuća, na „maloj maturi" se očekuje da najmanje 80% svih učenika u generaciji ostvari *osnovni nivo* standarda postignuća na testovima iz matematike. Prema rezultatima „male mature" iz 2022. godine *osnovni nivo* standarda postignuća na testovima iz matematike je postiglo samo 34% svih učenika u generaciji. Ako znamo da je 20 400 učenika te godine postiglo osnovni nivo na testovima iz matematike:

(a) koliko učenika je te godine bilo u generaciji?

(b) za koliko učenika se očekivalo da će, prema standardima postignuća, da postignu osnovni nivo na testovima iz matematike?

Zadatak 3.4 Indeks telesne težine (*Body Mass Index*) za neku osobu se računa ovako:

$$\mathrm{BMI} = \frac{\text{masa u kilogramima}}{(\text{visina u metrima})^2}.$$

Na osnovu ove vrednosti se težina *odrasle* osobe kategoriše prema sledećoj tabeli:

Kategorija	BMI
Neuhranjenost	$\mathrm{BMI} < 18,5$
Idealna težina	$18,5 \leqslant \mathrm{BMI} < 25,0$
Uvećana težina	$25,0 \leqslant \mathrm{BMI} < 30,0$
Gojaznost	$\mathrm{BMI} \geqslant 30,0$

(a) Odrediti BMI odrasle osobe koja je visoka 200 cm i ima 100 kg. U koju kategoriju se svrstava ova osoba?

(b) Odrediti BMI odrasle osobe koja je visoka 175 cm i ima 49 kg. U koju kategoriju se svrstava ova osoba?

Zadatak 3.5 U jednu mašinu se prilikom konstrukcije ugrađuje čelična osovina koja bi, u idelanom slučaju, trebalo da ima prečnik 20 mm i dužinu 1000 mm. Fabrika koja proizvodi ove mašine sarađuje sa raznim dobavljačima od kojih nisu svi pouzdani, tako da fabrika mora da vrši kontorolu kvaliteta pre nego što dozvoli da se osovina ugradi u mašinu. Osovina je prihvatljiva ako njene dimenzije odstupaju najviše 1% od idealnih. U sledećoj tabeli zaokružiti **DA** ukoliko su dimenzije navedenog proizvoda prihvatljive, odnosno **NE** ako nisu:

Deo: Osovina RN 3421-6/B			
Idealne dimenzije: $d = 20{,}00\,\text{mm}$; $L = 1000{,}00\,\text{mm}$			
Dobavljač	d [mm]	L [mm]	Prihvatljivo?
Axios d.o.o.	21,00	1001,00	DA NE
Bexios d.o.o.	20,20	1010,00	DA NE
Radionica „Kurbla”	19,95	999,00	DA NE

Zadatak 3.6 Dnevnice za službeni put se isplaćuju po sledećim pravilima:

- za svaka 24 časa provedena na putu se isplaćuje dnevnica u punom iznosu;
- ukoliko je nakon primene prvog pravila ostalo 12 ili više sati, za to vreme se takođe isplaćuje dnevnica u punom iznosu;
- ukoliko je nakon primene prvog pravila ostalo 8 ili više sati, ali manje od 12 sati, za to vreme se isplaćuje pola dnevnice;
- ukoliko je nakon primene prvog pravila ostalo manje od 8 sati, za to vreme se ne isplaćuje dnevnica.

U Javorkinoj i Hrastišinoj kompaniji visina dnevnice je 1600,00 din.

(a) Hrastiša je krenuo na službeni put 16. januara 2024. u 20h, a vratio se sa službenog puta 20. januara 2024. u 11h. Koliko novca će dobiti na ime dnevnica?

(b) Javorka je krenula na službeni put 26. februara 2024. godine u 13h, a vratila se sa službenog puta 2. marta 2024. godine u 15h. Koliko novca će dobiti na ime dnevnica?

Zadatak 3.7 (Progresivno oporezivanje) U jednoj državi se porez na zarade obračunava na sledeći način: na godišnje zarade koje ne prelaze \$10.000 se ne plaća nikakav porez; na godišnje zarade koje su strogo veće od \$10.000 ali ne prelaze \$100.000 obračunava se porez po stopi od 30%, ali samo na deo koji je iznad \$10.000; a na godišnje zarade koje su veće od \$100.000 porez se obračunava tako što se na \$10.000 ne obračunava porez, na \$90.000 se obračuna porez po stopi od 30%, dok se na sve preko \$100.000 obračunava porez po stopi od 60%. Preciznije, ako je z godišnja zarada onda se porez p obračunava ovako:

- ako je $z \leqslant \$10.000$ onda je $p = 0$;
- ako je $\$10.000 < z \leqslant \$100.000$ onda je $p = (z - \$10.000) \cdot 30\%$;
- ako je $z > \$100.000$ onda je $p = \$90.000 \cdot 30\% + (z - \$100.000) \cdot 60\%$.

Koliko je Hrastiša zaradio prošle godine ako je na ime poreza na zaradu platio \$87.000?

Zadatak 3.8 Jedne tople letnje večeri dok se odmarala u obližnjem letovalištu na moru Javorka je šetala pored luke i primetila divnu jahtu. U razgovoru sa ponositim kapetanom saznala je da je jahta dugačka 138 jardi 2 stope i 8 inča. Koliko je jahta dugačka u metrima ako se zna da jedan jard ima 3 stope, jedna stopa ima 12 inča, a jedan inč je 2,54 cm?

Zadatak 3.9 Hrastiša je napravio program koji na ekran računara 100 puta jednu za drugom ispisuje reč BIOINFORMATIKA bez razmaka. U jednom redu na ekranu računara može da se ispiše 80 slova nakon čega računar sam prenosi tekst u novi red. Tako je Hrastišin program ispisao nekoliko redova teksta.

(a) Koliko redova teksta je ispisao Hrastišin program?

(b) Kako izgleda poslednji red teksta?

Zadatak 3.10 Javorka je napisala program koji učitava prirodan broj n i onda na ekran računara n puta jednu za drugom ispisuje reč NOVISAD bez razmaka između reči. U jednom redu na ekranu računara može da se ispiše 80 slova nakon čega računar sam prenosi tekst u novi red.

(a) Koliko redova teksta će ispisati Javorkin program ako je korisnik uneo $n = 150$?

(b) Kako izgleda poslednji red teksta kada korisnik unese $n = 230$?

Zadatak 3.11 U jednoj generaciji ima 150 učenika. Na prvom pismenom zadatku iz informatike u toj generacije niko nije dobio ocenu 1, 42 učenika je dobilo ocenu 2, a 48 učenika ocenu 3. Koje ocene treba da dobiju ostali učenici u generaciji kako bi prosek generacije na tom pismenom bio barem 3,50?

Zadatak 3.12 Kompanija *Johann J. Drache AG* želi da uloži 120.000 EUR tako što će deo novca deponovati u banku, za drugi deo novca će kupiti državne obveznice, dok će preostali novac uložiti u akcije kompanije *Schizer Pharmaceuticals*. Kamata na godišnjem nivou za novac deponovan u banku iznosi 2%, dobit od državnih obveznica na godišnjem nivou je 5%, dok se za akcije kompanije *Schizer Pharmaceuticals* svake godine daje dividenda u visini od 9%. Kompanija *Johann J. Drache AG* želi da iz ova tri izvora prihoda na godišnjem nivou ukupno dobije 5.500 EUR, ali da pri tome u banku uloži dva puta više novca nego u akcije, kako bi se obezbedila od neočekivanih fluktuacija na berzi. Kako kompanija *Johann J. Drache AG* treba da raspodeli novac da bi to postigla?

Zadatak 3.13 Na tržištu se pojavio novi telekomunikacioni operater *Cablephonics* koji tvrdi da nudi povoljnije uslove telefonskih razgovora sa nekim zemljama u inostranstvu. Hrastiša je naišao na njihov flajer u kome je pročitao sledeće:

Najpovoljniji uslovi telefoniranja sa vašim prijateljima i rođacima u sledećim državama Evrope:			
Država	*Tarifa (din/min)*	*Država*	*Tarifa (din/min)*
Austrija	5	Luksemburg	8
BiH	4	Mađarska	3
Bugarska	5	Makedonija	4
Crna Gora	3	Nemačka	7
Grčka	6	Poljska	7
Hrvatska	5	Rumunija	5
Italija	7	Slovenija	6

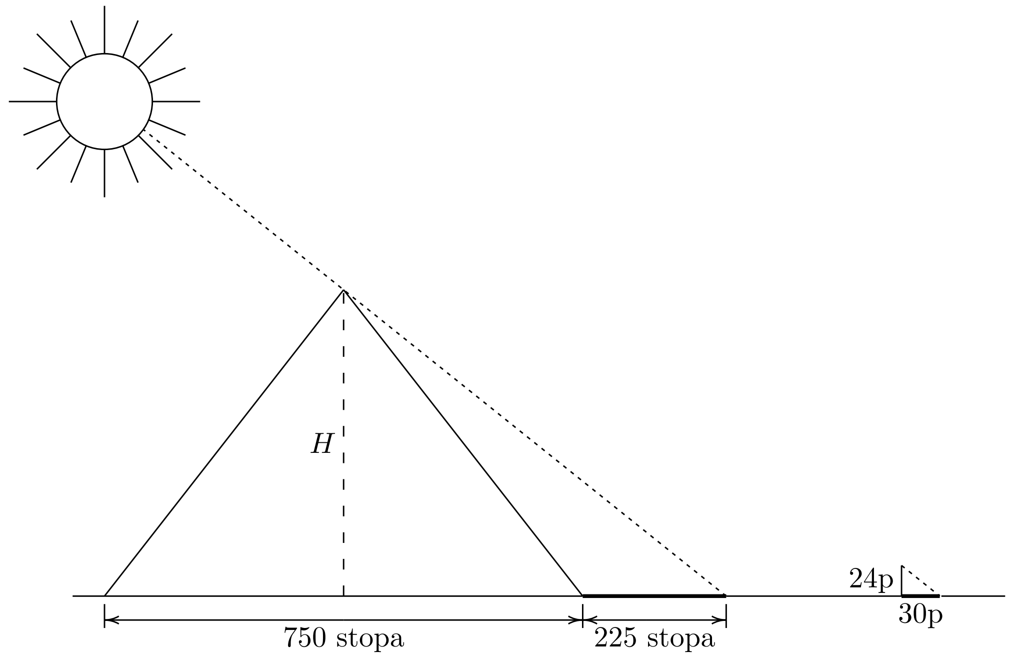
Pošto mu se ponuda učinila prihvatljivom, sklopio je ugovor sa njima. Posle tri meseca je primetio da nešto nije u redu sa njegovim telefonskim računima, koji su izgledali ovako:

Mesec	Razgovori sa Mađarskom (min)	Razgovori sa Austrijom (min)	Razgovori sa Nemačkom (min)	Račun (din)
Septembar	90	120	180	2520
Oktobar	70	100	120	1840
Novembar	50	110	150	2060

Koliko je *Cablephonics* zapravo naplaćivao Hrastiši minut razgovora sa Mađarskom, Austrijom odnosno, Nemačkom?

4 Geometrija

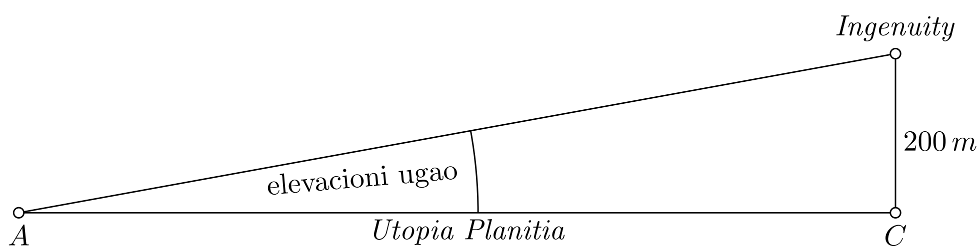
Zadatak 4.1 Tales iz Mileta (onaj Tales iz Talesove teoreme) je postao poznat u svetu starogrčke nauke po tome što je prvi na svetu uspeo da izmeri visinu Keopsove piramide. Tales je znao da je Keopsova piramida prava pravilna četvorostrana piramida u čijoj osnovi je kvadrat stranice 750 stopa (to se lako izmeri – samo treba prošetati oko piramide nogu pred nogu). Onda je sačekao da sunčevi zraci padnu pod odgovarajućim uglom, pa je izmerio dužinu dve senke: prvo je ustanovio da dužina senke piramide merena od njene baze iznosi 225 stopa, a onda je u blizini piramide u zemlju zabio štap dužine 24 palca i utvrdio da on baca senku dužine 30 palaca, kao na slici:



(a) Koliko je u Talesovo vreme bila visoka Keopsova piramida?

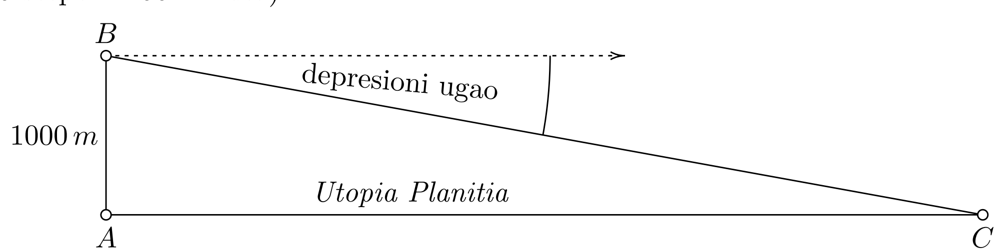
(b) Usled erozije (vetar, peščane oluje, divlji turisti) Keopsova piramida danas ima visinu od 450 stopa. Za koliko procenata se smanjila visina Keopsove piramide u odnosu na Talesovo vreme?

Zadatak 4.2 Istraživačka baza A smeštena u zaravni Utopija na Marsu (*Utopia Planitia*) je uočila nešto interesantno u tački C u toj zaravni, pa je poslala helikopter *Ingenuity* u izviđanje. Kada je bio tačno iznad tačke C helikopter se javio bazi sa visine od $200\,m$. Iz baze A se helikopter vidi pod elevacionim uglom od $9°50'$ (9 stepeni i 50 minuta).



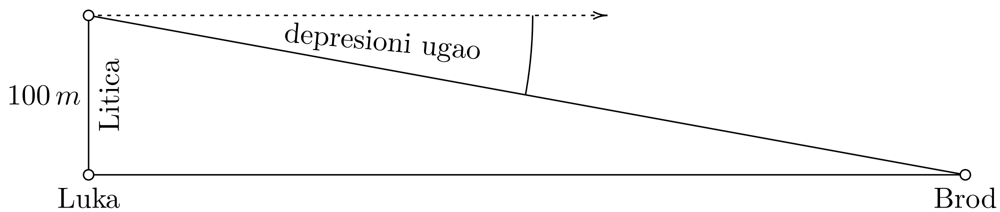
Oceniti udaljenost tačke C od baze A (zanemariti zakrivljenost Marsa).

Zadatak 4.3 Istraživačka baza A smeštena u zaravni Utopija na Marsu (*Utopia Planitia*) želi da pošalje ekspediciju do izvesne tačke C u toj zaravni. Iz osmatračkog balona B koji se nalazi na visini $1000\,m$ iznad baze A se cilj C ekspedicije vidi pod depresionim uglom od $9°50'$ (9 stepeni i 50 minuta).



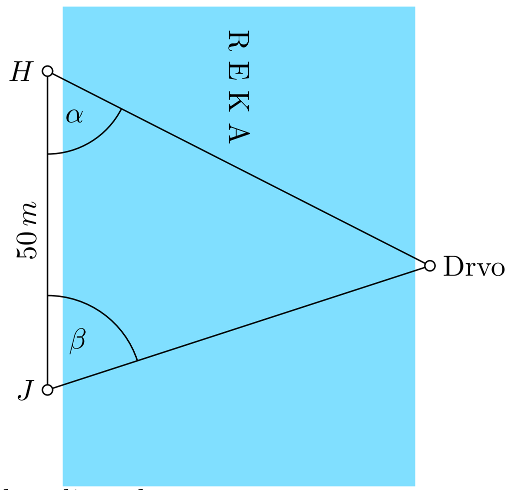
Oceniti udaljenost cilja C od baze A (zanemariti zakrivljenost Marsa).

Zadatak 4.4 Sa litice koja je visoka $100\,m$ i nalazi se tačno iznad ulaza u luku posmatramo brod koji plovi u pravcu luke. Prilikom prvog posmatranja brod se video pod depresionim uglom od $5°$, dok se prilikom drugog posmatranja brod video pod depresionim uglom od $20°30'$ (20 stepeni i 30 minuta).

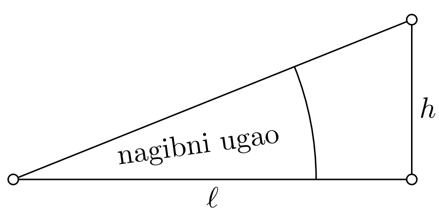


Oceniti rastojanje koje je brod prešao između dva osmatranja (zanemariti zakrivljenost Zemlje).

Zadatak 4.5 Hrastiša i Javorka su odlučili da izračunaju širinu reke koja protiče kroz njihovo naselje na sledeći način. Njih dvoje su uočili jedno interesantno drvo na drugoj obali reke, onda su stali na rastojanje od $50\,m$ i izmerili dva ugla: Hrastiša je gledajući u drvo na drugoj obali izmerio ugao α do Javorke, dok je Javorka gledajući u drvo na drugoj obali izmerila ugao β do Hrastiše. Hrastiša je izmerio $63°\,26'\,6''$, a Javorka ugao $71°\,33'\,54''$. Oceniti širinu reke.



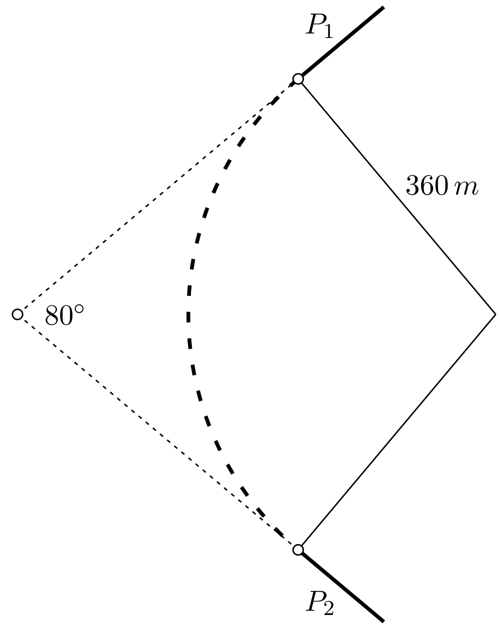
Zadatak 4.6 Nagib saobraćajnice predstavlja odnos savladane visine (h) i pređenog horizontalnog rastojanja (ℓ):



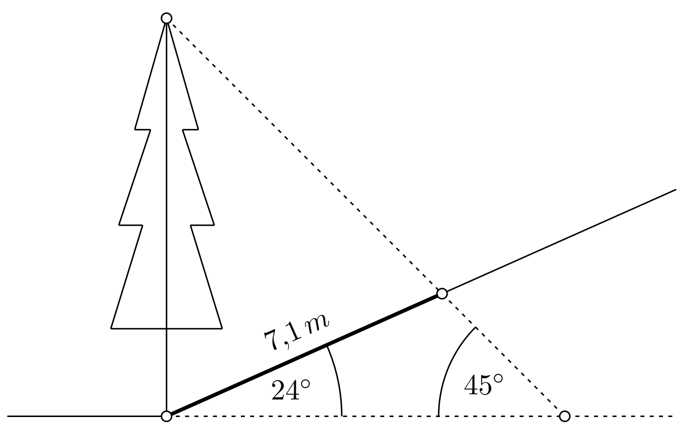
Nagib se često izražava u procentima. Tako, nagib od 12% znači da je $\frac{h}{\ell} = \frac{12}{100}$.

Jedan automobil se kreće usponom čiji nagib je 3% celom dužinom puta. Oceniti koju visinu je savladao automobil nakon što je prešao $3000\,m$. Prilikom procene koristiti činjenicu da za male nagibne uglove kao što je ovaj važi da je kosinus nagibnog ugla približno jednak 1.

Zadatak 4.7 Krakove P_1 i P_2 železničke pruge treba spojiti kružnim lukom poluprečnika $360\,m$. Kada bi se ova dva kraka produžila do preseka, zaklopila bi ugao od $80°$. Izračunati dužinu kružnog luka koji će ih spojiti. Uzeti da je $\pi \approx 3{,}14$.

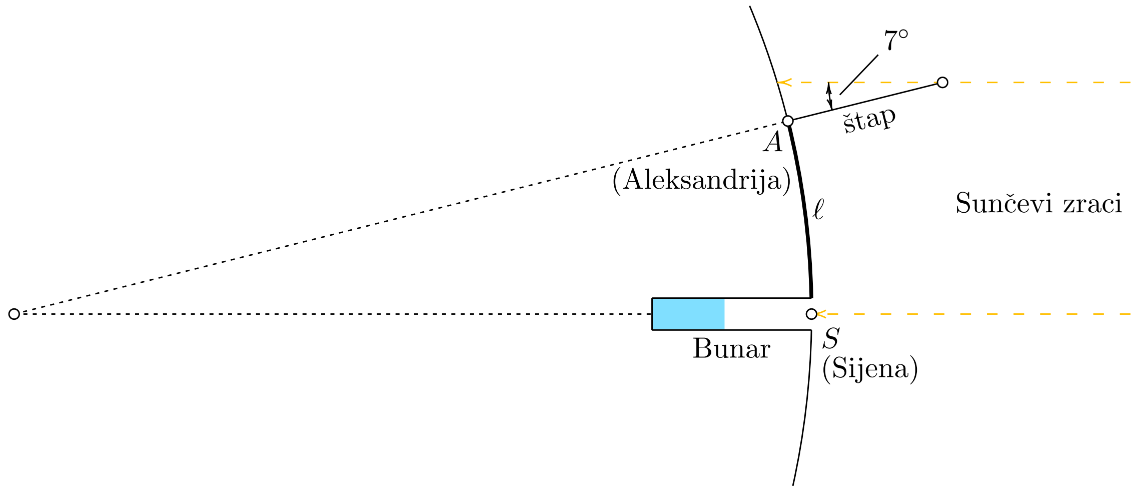


Zadatak 4.8 U samom podnožju brda, sa prisojne strane, raste drvo pravo uvis, dok se padina polako uspinje od drveta pod uglom od $24°$ u odnosu na horizontalu. Kada sunčevi zraci padaju pod uglom od $45°$ u odnosu na horizontalu, dužina senke koju drvo baca na padinu je $7{,}1\,m$.



Oceniti visinu drveta.

Zadatak 4.9 Eratosten iz Kirene je bio starogrčki filzof koji je, između ostalog, ostao upamćen po tome što je prvi uspeo da izačuna obim Zemlje. Dok je radio kao upravnik čuvene biblioteke u Aleksandriji, jednoga dana je pročitao u nekom svitku papirusa da u Sijeni (gradu južno od Aleksandije) postoji veliki bunar koji na letnji solsticijum (21. jun po današnjem kalendaru) tačno u podne *ne baca senku.* To znači da se na letnji solsticijum tačno u podne Sunce nalazi tačno iznad otvora bunara. Pošto je znao da na letnji solsticijum tačno u podne štapovi i stubovi u Aleksandriji bacaju senku, to mu je dalo ideju kako da izmeri zakrivljenost Zemlje, pa time i njen poluprečnik. Prvo je platio jednom čoveku da mu izmeri rastojanje ℓ od Aleksandrije do Sijene i tako je saznao da $\ell = 4\,900$ stadija. (*Stadion* je starogrčka jedinica mere, 1 stadion = 165 m.) Naredne godine na letnji solsticijum Eratosten je izmerio da štap poboden okomito u tle u Aleksandriji baca senku pod uglom od $7°$.

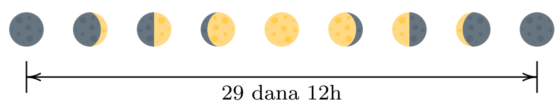


(a) Koliki obim Zemlje je dobio Eratosten, u stadijima?

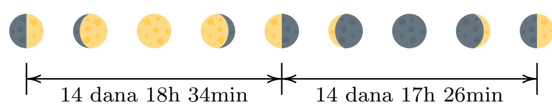
(b) Koliki obim zemlje dobio Eratosten, ali u kilometrima?

(c) Mi danas znamo da je obim Zemlje 40 075 km. Koliku relativnu grešku je napravio Eratosten?

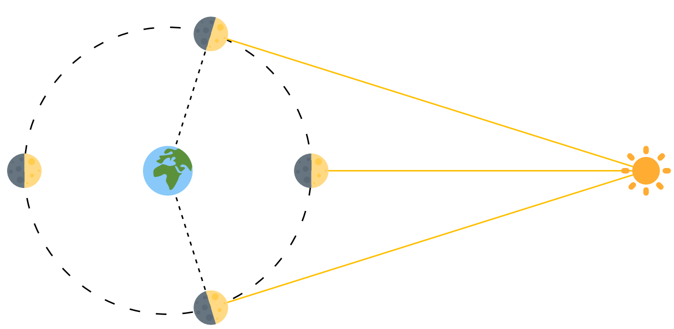
Zadatak 4.10 Naši preci su oduvek bili fascinirani Mesečevim menama. Zato su pažljivo beležili sve što je u vezi sa njima. Prvo su primetili da jedan Mesečev ciklus traje 29 dana i 12 sati:



Kada se meri vreme koje protekne od jedne do druge čevrti primećuje se interesantan fenomen: od prve do poslednje četvrti Mesecu treba 14 dana 18 sati i 34 minuta, dok od poslednje četvri do prve četvrti narednog ciklusa Mesecu treba 14 dana 17 sati i 26 minuta.



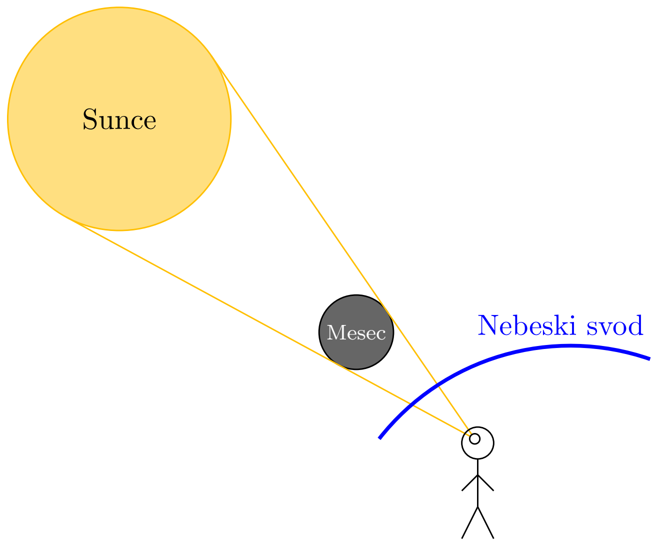
Razlog je, naravno, to što se Sunce nalazi na (velikom ali ipak) konačnom rastojanju od Zemlje, pa kada se konstruišu tangente iz centra Sunca na Mesečevu orbitu vidimo da njihove dodirne tačke dele orbitu Meseca na na dva luka koji nisu iste dužine – kraći luk “okrenut prema Suncu” i duži luk “okrenut od Sunca”.



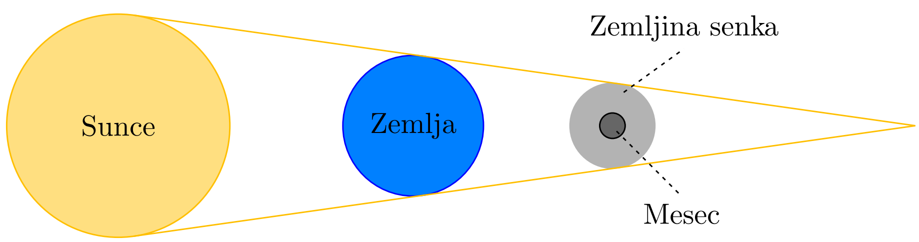
Koristeći navedene podatke oceniti koliko puta je rastojanje Sunca i Zemlje veće od rastojanja Meseca i Zemlje. (Rastojanje dva nebeska tela je rastojanje njihovih centara; za sva tri tela smatramo da su lopte i da kruže jedno oko drugog po kružnim orbitama.)

Zadatak 4.11 Pomračenje Sunca i pomračenje Meseca predstavljaju još dva astronomska fenomena kojima su naši preci bili fascinirani. Kasnije, kada smo razumeli o čemu je tačno reč, iskoristili smo ova dva fenomena da izračunamo koliko su veliki Sunce i Mesec, kao i koliko su udaljeni od Zemlje.

(a) Kada se posmatra pomračenje Sunca (što je situacija do koje dolazi kada se Mesec nađe tačno između Zemlje i Sunca), primećuje se da je Mesečev disk na nebu približno iste veličine kao Sunčev disk na nebu. Oceniti na osnovu ovoga odnos prečnika Sunca i Meseca.



(b) Kada se posmatra pomračenje Meseca (što je situacija do koje dolazi kada se Zemlja nađe tačno između Meseca i Sunca), primećuje se da je Zemljina senka znatno veća od Mesečevog diska:

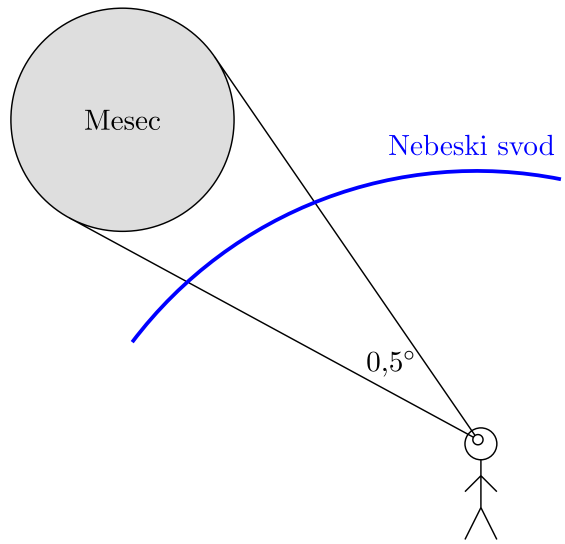


Aristarh sa Samosa je oko 300 godina pre nove ere izračunao prečnik Zemljine senke sledećim lukavstvom. Prvo je jedne vedre noći posmatrao kako se Mesec kreće preko neba, kako zvezde nestaju iza njegovog diska i kasnije se pojavljuju, i tako je izmerio vreme koje je Mesecu potrebno da pređe svoj prečnik. Onda je strpljivo sačekao naredno pomračenje Meseca, pa je izmerio vreme koje je Mesecu potrebno da prođe kroz Zemljinu senku. Poređenjem ta dva vremena je dobio da prečnik Zemljine senke iznosi oko $\frac{8}{3}$ prečnika Meseca.

Koristeći se ovim podatkom, kao i činjenicom da znamo odnos rastojanja Sunca i Meseca od Zemlje (Zadatak 4.10), kao i veličinu Zemlje (koju je odredio Eratosten), oceniti veličinu

Sunca i Meseca. Umesto poluprečnika Zemlje koji se dobija iz Eratostenove procene Zemljinog obima koristiti da poluprečnik Zemlje iznosi 6730 km.

(c) Aristarh je takođe utvrdio da se Mesečev disk sa Zemlje vidi pod uglom od 0,5°. Oceniti na osnovu toga rastojanje Meseca od Zemlje, kao i rastojanje Sunca od Zemlje.

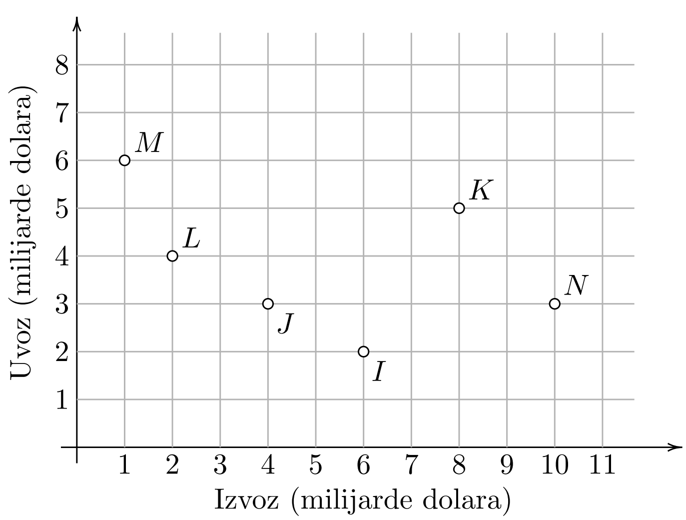


(d) Uporediti dobijene vrednosti sa savremenim merenjima:

- poluprečnik Meseca je 1 738 km
- poluprečnik Sunca je 696 000 km
- rastojanje Meseca od Zemlje je 384 400 km
- Rastojanje Sunca od Zemlje je 149 600 000 km

5 Realne funkcije

Zadatak 5.1 Na sledećem grafikonu je prikazan ukupan uvoz i ukupan izvoz za 6 država u prošloj godini:



I - Idimidođija
J - Jadovija
K - Kukurundija
L - Ladoležija
M - Maketanija
N - Neoplantija

Kada država više potroši na uvoz nego što zaradi izvozom, kažemo da ima *spoljnotrgovinski deficit.* Obrnuto, ako država više zaradi izvozom nego što je potrošila na uvoz kažemo da ima *spoljnotrgovinski suficit.* Na primer, država Ladoležija je imala spoljnotrgovinski deficit u visini od 2 milijarde dolara.

(a) Koja država ima najmanji uvoz?

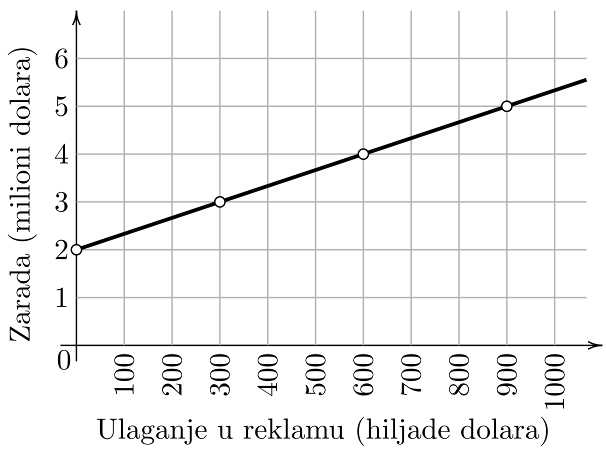
(b) Koja država ima najveći izvoz?

(c) Koja država ima najveći spoljnotrgovinski deficit?

(d) Koja država ima najveći spoljnotrgovinski suficit?

(e) Napiši jednačinu prave koja razdvaja države sa spoljnotrgovinskim suficitom od država sa spoljnotrgovinskim deficitom i skiciraj tu pravu na grafiku.

Zadatak 5.2 Na sledećem grafikonu je prikazano kako ulaganje u reklamu proizvoda doprinosi zaradi jedne kompanije:



Na primer, ako uopšte ne ulaže u reklamu, zarada kompanije je 2 000 000 dolara, ali ako u reklamu uloži 900 000 dolara, zarada će skočiti na čak 5 000 000 dolara.

(a) Kolika će biti zarada kompanije ako u reklamu uloži 600 000 dolara?

(b) Koliko najmanje treba uložiti u reklamu da bi zarada kompanije bila 3 000 000 dolara?

(c) Visina zarade se može opisati u funkciji od novca uloženog u reklamu formulom oblika

$$z = a \cdot u + b,$$

gde je z zarada, u je ulaganje u reklamu, a a i b su neki parametri. Odrediti parametre a i b koji odgovaraju situaciji predstavljenoj grafikonom.

Zadatak 5.3 U jedinstvenom ekosistemu planete Mjong *aknuti* i *blambovi* žive u simbiozi. I jedna i druga vrsta organizama se hrani supstancom *mikulaks*, pri čemu blambovima za pravilan rast i održavanje zdravlja treba i supstanca *zedoron* koju aknuti proizvode. Za uzvrat, blambovi emituju snažno empatičko polje koje šititi aknute od raznih štetočina. Jedan aknut proizvede $3\,ml$ zedorona dnevno, dok jednom blambu treba $5\,ml$ zedorona dnevno. Jedan aknut popije $10\,ml$ mikulaksa dnevno, dok jedan blamb popije čak $50\,ml$ mikulaksa dnevno.

Naučna ekspedicija sa Zemlje je ustanovila da empatičko polje koje šire blambovi veoma blagotvorno deluje na ljude, pa je odlučila da donese nekoliko aknuta i nekoliko blambova na Zemlju radi daljih ispitivanja. Pri tome, ekspedicija je zainteresovana za blambove, a aknute mora da ponese kako bi blambovi živi i zdravi stigli na Zemlju. Naravno, ekspedicija će morati da ponese i dovoljnu količinu mikulaksa, ali zbog relativno malog prostora za smeštanje egzobioloških uzoraka ekspedicija može da ponese količinu mikulaksa koja odgovara potrošnji od $2\,l$ dnevno.

Koliko aknuta, a koliko blambova ekspedicija treba da ponese na Zemlju da bi uz data ograničenja na količinu mikulaksa na Zemlju donela što više živih i zdravih blambova?

Zadatak 5.4 Zli čarobnjak Saruman je odlučio da prestane da vija Hobite i da se posveti nauci. Kao svoju prvu vežbu iz naučno-istraživačkog rada rešio je da izračuna gravitaciono ubrzanje Mordora. Eksperiment su pripremili ovako: Saruman se popeo na vrh Sauronove 70 metara visoke kule, dok je njegov pomoćnik kroz jedan prozor negde blizu sredine kule ispalio iz samostrela strelu u vis. Saruman je primetio da je streli bila potrebna tačno jedna sekunda da stigne do najviše tačke na kuli na kojoj se on nalazio. Strela je potom nastavila put u vis, i u jednom trenutku počela da pada naniže, putem kojim je i ispaljena. Posle tačno 7 sekundi od ispaljivanja strele Sarumanov pomoćnik je zabeležio da je strela prošla pored prozora kroz koji je ispaljena, dok je tačno jednu sekundu kasnije strela pala na zemlju. Pogledavši u svoju čarobnu kuglu Saruman je saznao da se pređeni put strele ispaljene naviše kod uspravnog hica računa po formuli

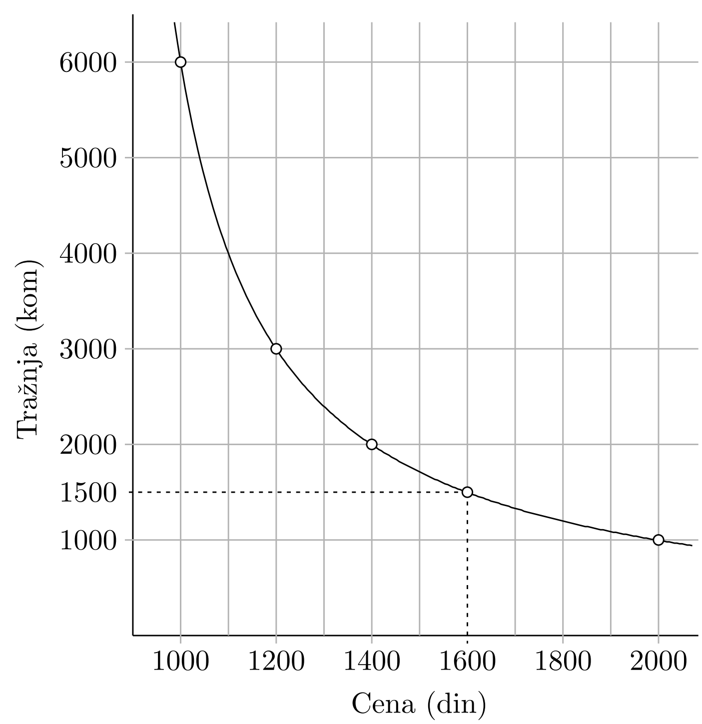
$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0,$$

gde je g gravitaciono ubrzanje Mordora, v_0 je početna brzina strele, a h_0 je visina prozora kroz koji je strela ispaljena. Iako vešt čarobnjak, Saruman nije uspeo da se izbori sa ovim čisto matematičkim problemom. Pomozite zlom čarobnjaku Sarumanu da odredi g – gravitaciono ubrzanje Mordora, kako bi se dodvorio svom gospodaru Sauronu.

Zadatak 5.5 *Potražnja* predstavlja funkciju oblika

$$\text{količina} = f(\text{cena})$$

koja kaže koju količinu proizvoda možemo prodati po navedenoj ceni. Na primer, potražnja nekog proizvoda predstavljena je funkcijom pored i sa grafikona očitavamo da se po ceni od 1600 din po komadu može prodati 1500 komada tog proizvoda.



(a) Kolika je potražnja ovog proizvoda po ceni od 1400 din po komadu?

(b) Koliko najviše može da košta jedan komad ovog proizvoda ako želimo da prodamo 3000 komada?

(c) Potražnja koja je predstavljena na gornjem dijagramu ima oblik

$$f(x) = \frac{a}{x-b}.$$

Odrediti parametre a i b tako da dati dijagram predstavlja grafik funkcije f.

Zadatak 5.6 Kompanija "Frula&Opanak Ltd" proizvodi suvenire, i to čini veoma uspešno. Novi menadžment kompanije je odlučio da pokrene proizvodnju nove vrste suvenira, ali još treba da odluči da li će kompanija da izgradi sopstveni proizvodni pogon, ili će proizvodnju da autsorsuje kompaniji "Kolo&Vreteno Inc". Ukoliko menadžment odluči da se izgradi sopstveni pogon kompanija će imati 100 000 evra inicijalnih troškova za izgradnju pogona, i onda će trošak za izradu suvenira iznositi 4 evra po komadu. S druge strane, ako menadžment odluči da autsorsuje proizvodnju onda će od kompanije "Kolo&Vreteno Inc" dobijati suvenire po ceni od 14 evra po komadu, što u tom slučaju predstavlja jedine troškove.

(a) Ako je kompanija "Frula&Opanak Ltd" odlučila da napravi barem 11 000 suvenira, kada su troškovi manji: ako napravi sopstveni pogon za proizvodnju ili ako autsorsuje proizvodnju?

(b) Ako je kompanija "Frula&Opanak Ltd" odlučila da napravi najviše 8 000 suvenira, kada su troškovi manji: ako napravi sopstveni pogon za proizvodnju ili ako autsorsuje proizvodnju?

(c) Za koju količinu proizvedenih suvenira suvenira su troškovi izgradnje sopstvenog pogona isti kao troškovi autsorsovanja proizvodnje?

Zadatak 5.7 Mala porodična firma "Frula&Opanak Ltd" proizvodi suvenire. Za njihov najnoviji proizvod (opanak koji svira frulu) su proveli ispitivanje tržišta kako bi odredili optimalnu cenu suvenira.

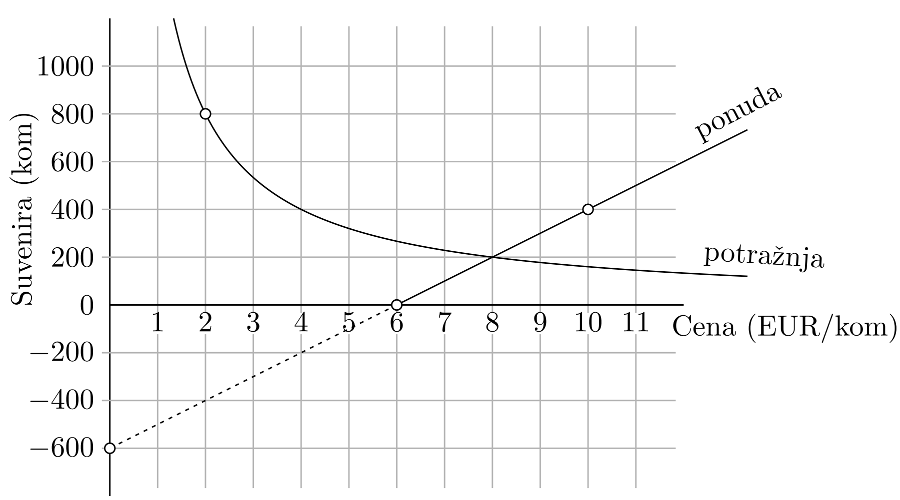
(a) *Potražnja* za nekim proizvodom predstavlja funkciju oblika:

$$\text{količina} = f(\text{cena})$$

koja kaže koju količinu proizvoda možemo prodati po navedenoj ceni. Ispitivanje tržišta je pokazalo da funkcija potražnje za novim suvenirom firme "Frula&Opanak Ltd" ima oblik

$$f(x) = \frac{c}{x}$$

i prikazana je na grafikonu ispod. Odrediti broj c ako se zna da po ceni od 2 EUR/kom potražnja za suvenirom iznosi 800 komada.



(b) *Ponuda* predstavlja funkciju oblika:

$$\text{količina} = g(\text{cena})$$

koja kaže koliko proizvoda kompanija može da proizvede po datoj ceni. Ispitivanje proizvodnih kapaciteta kompanije je pokazalo da ponuda novog suvenira firme "Frula&Opanak Ltd" ima oblik

$$g(x) = ax + b$$

i prikazana je takođe na gornjem grafikonu. Odrediti brojeve a i b ako se zna da po ceni od 6 EUR/kom ponuda je 0 komada, dok po ceni od 10 EUR/kom ponuda dostiže 400 komada.

(c) Tržište je uravnoteženo ako je ponuda jednaka potražnji. Kada je tržište uravnoteženo svi koji žele da kupe proizvod mogu da ga kupe, a kompanija nema potrebe da pravi velika skladišta jer sve što proizvede može i da proda. Odrediti cenu po kojoj će tržište za novu vrstu suvenira biti uravnoteženo.

6 Programiranje

Zadaci iz programiranja se mogu rešiti u bilo kom programskom jeziku.

Zadatak 6.1 Napisati program koji učitava dimenziju niza $1 \leqslant K \leqslant 50$, a zatim i niz prirodnih brojeva manjih od 10000 zadate dimenzije K (vršiti kontrolu unosa). Potom je potrebno pronaći i ispisati na ekranu tri najveća različita elementa niza.

Zadatak 6.2 Napisati program koji učitava dimenziju niza $1 \leqslant K \leqslant 50$, a zatim i niz prirodnih brojeva manjih od 10000 zadate dimenzije K (vršiti kontrolu unosa). Potom je potrebno ispisati na ekranu sve elemente niza čiji je zbir cifara dvocifren broj.

Zadatak 6.3 Napisati program koji rešava sledeći problem. Treba učitati petocifreni broj `broj`. Zatim treba generisati i odštampati niz `cifre` čiji su elementi cifre učitanog broja koje su veće od prosečne vrednosti svih cifara učitanog broja. Primer: `broj`$= 93552$, `cifre`$= [9, 5, 5]$ (jer je prosek 4,8). Kod učitavanja broja treba vršiti kontrolu unosa. Takođe treba omogućiti višestruko izvršavanje programa na zahtev korisnika.

Zadatak 6.4 Napisati program koji od korisnika učitava prirodan broj N, $5 \leqslant N \leqslant 1000$, a zatim i niz L od N prirodnih brojeva. Vršiti kontrolu unosa u svim učitavanjima. Među članovima niza pronaći i ispisati one koji su deljivi prvom cifrom broja N (gledano sleva na desno). Npr. za $N = 8$ i $L = [2, 18, 32, 45, 17, 64, 12, 56]$ ispisuju se 32, 64 i 56. Treba omogućiti višestruko izvršavanje programa na zahtev korisnika.

Zadatak 6.5 Napisati program koji od korisnika učitava prirodan broj N, $10 \leqslant N \leqslant 1000$, a zatim i niz L od N realnih brojeva. Vršiti kontrolu unosa u svim učitavanjima. Niz L treba izmeniti tako da svaki elemenat koji je bar 2 puta manji od prosečne vrednosti članova niza treba zameniti nulom. Na kraju treba odštampati izmenjeni niz L. Npr. za $N = 10$ i niz $L = [2.4, -3.2, 7.3, 8.2, 12.6, -2.2, -1.0, 8.0, 16.4, 4.0]$ ispisuje se $L = [0, 0, 7.3, 8.2, 12.6, 0, 0, 8.0, 16.4, 4.0]$. Treba omogućiti višestruko izvršavanje programa na zahtev korisnika.

Zadatak 6.6 Napisati program koji učitava prirodan broj N, a zatim izračunava i štampa drugu po redu cifru C gledano sa leve strane broja N, koja je veća od 3. Ukoliko broj N nema dve cifre koje su veće od 3 odštampati odgovarajuću poruku. Primer: Ako je $N = 7326$ tada je $C = 6$.

Zadatak 6.7 Napisati program koji učitava dimenziju niza $1 \leqslant K \leqslant 50$, a zatim i niz prirodnih brojeva manjih od 10000 zadate dimenzije K (vršiti kontrolu unosa). Potom je potrebno ispisati na ekranu sve elemente niza kojima je prva cifra jednaka sa poslednjom. Napomena: za jednocifrene elemente niza važi da je prva cifra jednaka poslednjoj.

Zadatak 6.8 Napisati program u bilo kom programskom jeziku koji učitava dimenziju niza $1 \leqslant K \leqslant 50$, a zatim i niz prirodnih brojeva manjih od 10000 zadate dimenzije K (vršiti kontrolu unosa). Potom je potrebno ispisati na ekranu sve trocifrene elemente niza koji su palindromi (čitaju se isto sa leva na desno i sa desna na levo).

7 Rešenja

1.1.

Iskaz	Iskaz je tačan?		Odgovor
$a+b+c+d=a+b+c$	DA	NE	DA, jer je $d=0$
$a>0 \wedge b>0$	DA	NE	DA, jer su i a i b pozitivni
$c<0 \vee d<0$	DA	NE	DA, jer je c negativan, što je dovoljno da disjunkcija bude tačna
$(\forall x \in P)$ x je deljiv sa 3	DA	NE	DA, jer je vrednost svake promenljive deljiva sa 3
$(\exists x \in P)\ x>9$	DA	NE	NE, jer ne postoji promenljiva čija vrednost je strogo veća od 9
$(\forall x \in P)(\forall y \in P)\ x+y \geqslant 3$	DA	NE	NE, jer je $c+d<3$
$(\forall x \in P)(\exists y \in P)\ x \cdot y \geqslant 0$	DA	NE	DA, jer za svako x možemo da uzmemo $y=d=0$ i tada je $x \cdot y=0$

1.2.

Iskaz	Iskaz je tačan?		Odgovor
$a \to d$	DA	NE	NE, jer ne postoji direktan put od a do d
$a \leadsto e$	DA	NE	DA, jer se od a do e može stići preko b i d
$(\forall x \in G)(\exists y \in G)\ x \to y$	DA	NE	DA, jer iz svakog grada vodi direktan put u neki grad: $a \to b$, $b \to d$, $c \to a$, $d \to e$, $e \to c$, $f \to d$
$(\forall x \in G)(\exists y \in G)(x \to y \vee y \to x)$	DA	NE	DA, vidi prethodni odgovor
$(\exists x, y, z \in G)(x \to y \wedge y \to z \wedge z \to x)$	DA	NE	DA, jer $c \to d \to e \to c$
$(\forall x \in G)\ a \leadsto x$	DA	NE	DA, jer $a \to b \to c \to d \to e \to f$
$(\forall x \in G)(\forall y \in G)\ x \leadsto y$	DA	NE	DA jer $a \to b \to c \to d \to e \to f \to d \to e \to c \to a$

1.3.

Iskaz	Iskaz je tačan?		Odgovor
Za svako pojavljivanje slova A u nizu negde desno od njega se javlja slovo C	DA	NE	DA, jer se niz završava slovom C
Za svako pojavljivanje slova G u nizu negde levo od njega se javlja slovo T	DA	NE	DA, jer se T prvi put javlja na 4. mestu, a pre toga nema slova G
Slovo C se javlja u nizu češće nego slovo T	DA	NE	NE, slovo T se javlja češće (vidi dole)
Slovo A je najfrekventnije slovo (tj. javlja se češće nego ostala slova u nizu)	DA	NE	DA: A-15, C-7, T-8, G-9
U nizu se javlja kombinacija TGA	DA	NE	NE
Postoji slovo C u nizu neposredno iza koga se javlja slovo G	DA	NE	NE
Neposredno iza svake kombinacije GT uvek sledi slovo A	DA	NE	DA

1.4.

Iskaz	Iskaz je tačan?	
S_{TA}	DA	NE
D_{CT}	DA	NE
S_{AT}	DA	NE
$S_{AT} \Rightarrow D_{GA}$	DA	NE
$(\exists X \in \{A, C, T, G\}) S_{AX}$	DA	NE
$(\forall X \in \{A, C, T, G\}) D_{XG}$	DA	NE

Obrazloženje:

- Iskaz S_{TA} je tačan zato što se u navedenom nizu posle svakog slova T odmah do njega javlja slovo A.
- Iskaz D_{CT} je tačan zato što se za svako pojavljivanje slova C u nizu negde desno od njega javlja slovo T (ne nužno odmah do njega).
- Iskaz S_{AT} je netačan zato što postoji pojavljivanje slova A u nizu (drugo) iza koga sledi slovo C, a ne slovo T.
- U iskazu $S_{AT} \Rightarrow D_{GA}$ imamo da je S_{AT} netačan iskaz; prema tome, nezavisno od tačnosti iskaza D_{GA}, iskaz $S_{AT} \Rightarrow D_{GA}$ je tačan zato što za implikaciju važi $(\perp \Rightarrow \top) = \top$ i $(\perp \Rightarrow \perp) = \top$.
- Iskaz $(\exists X \in \{A, C, T, G\}) S_{AX}$ se govornim jezikom može zapisati ovako: "postoji slovo $X \in \{A, C, T, G\}$ takvo da se za svako pojavljivanje slova A u nizu odmah do njega nalazi slovo X". To nije tačno zato što u nizu imamo i niz AT i niz AC. Dakle, nije tačno da se slovo A druži samo sa jednom slovom desno od sebe.
- Iskaz $(\forall X \in \{A, C, T, G\}) D_{XG}$ se govornim jezikom može zapisati ovako: "za svako slovo $X \in \{A, C, T, G\}$ važi sledeće: za svako pojavljivanje slova X negde u navedenom nizu desno od njega se pojavljuje slovo G." Ovo nije tačno za $X = G$ jer ne postoji nijedno slovo negde desno od poslednjeg pojavljivanja slova G u nizu.

1.5.

Iskaz	Iskaz je tačan?		Odgovor
U nekim mesecima je potrošnja prelazila 300 kWh	DA	NE	DA, na primer u januaru
Potrošnja nikada nije padala ispod 200 kWh	DA	NE	DA
Postoje dva meseca u kojima je potrošnja bila ista	DA	NE	DA, u martu i avgustu
U januaru je potrošnja bila veća od prosečne potrošnje za tu godinu	DA	NE	DA: lako se bez računa vidi da je prosečna potrošnja manja od 300 kWh jer veću potrošnju u januaru "pojede" mala potrošnja u aprilu, a svi ostali brojevi u tabeli su ispod 300
Postoji mesec u kome je potrošnja bila manja od medijalne potrošnje za tu godinu	DA	NE	DA: minimalna potrošnja u aprilu je sigurno manja od medijalne potrošnje
Ukupna potrošnja u martu, aprilu i maju je bila veća nego ukupna potrošnja u septembru, oktobru i novembru	DA	NE	NE, upravo obrnuto jer je SEP $>$ MAR, OKT $>$ APR i NOV $>$ MAJ
Prosečna dnevna potrošnja u januaru je bila veća od prosečne dnevne potrošnje u februaru	DA	NE	NE: januar ima 31 dan pa je prosečna dnevna potrošnja u januaru $309/31 < 10$; februar ima 28 ili 29 dana pa je prosečna dnevna potrošnja u februaru $291/28 > 10$ ili $291/29 > 10$

1.6.

Iskaz	Iskaz je tačan?		Odgovor
U poslednjoj godini navedenog perioda je Kukurundija imala najbolji izvozni rezultat od svih godina za koje su nam dati podaci	DA	NE	DA
Postoji godina u posmatranom periodu kada je Kukurundija duplo više novca potrošila na uvoz nego što je zaradila izvozom	DA	NE	DA: 2017 je uvoz = 6, izvoz = 3
U nekim godinama navedenog perioda je Kukurundija imala spoljnotrgovinski suficit	DA	NE	DA: 2019. i 2023.
U navedenom periodu je država Kukurundija češće imala spoljnotrgovinski suficit nego spoljnotrgovinski deficit	DA	NE	NE: suficit je imala samo 2019. i 2023. godine; u ostalim godinama posmatranog perioda je imala deficit
U navedenom periodu država Kukurundija nikada nije imala spoljnotrgovinski deficit veći od 5 milijardi dolara	DA	NE	DA
U navedenom periodu je država Kukurundija više zaradila od izvoza nego što je potrošila na uvoz	DA	NE	NE

1.7. (a) U drugom redu nedostaju brojevi 7 i 8, a kolona 4 sadrži broj 7. Zato red 2 izgleda ovako: 2 9 6 8 1 5 3 4 7.

(b) Pošto kutija 2, kolona 7 i kolona 9 već sadrže broj 1, u redu 3 broj 1 treba upisati na 8. mesto. Pošto kutija 2 i kolona 7 već sadrže broj 6, u redu 3 broj 6 treba upisati na 9. mesto. Pošto kutija 3, kolona 4 i kolona 5 već sadrže broj 7, u redu 3 broj 7 treba upisati na 6. mesto. Broj 2 sada treba upisati na 4. mesto u redu 3, broj 4 na 5. mesto, i konačno, broj 9 na 7. mesto. Zato red 3 izgleda ovako: 5 8 3 2 4 7 9 1 6.

(c) Broj 4: red 7 već sadrži brojeve 1, 3, 6, 7, 8; kolona 6 sadrži brojeve 5 i 9; a kutija u kojoj se nalazi polje A sadrži broj 2.

(d) Pretpostavimo da polje B sadrži broj 4 i pokušajmo da popunimo kolonu 2. U polje (red 8, kolona 2) tada može da se upiše jedino broj 5, u polje (red 5, kolona 2) može da se upiše jedino broj 6, pa ostaje da u polje (red 9, kolona 2) može da se upiše jedino broj 7. Tako dobijamo da je u redu 9 dva puta upisan broj 7, što nije dozvoljeno.

2.1. Osam drugova treba da se razmesti na osam mesta u bioskopu. Prvi može da bira bilo koje od 8 raspoloživih mesta. Kada se on smesti, sledeći može da odabere bilo koje od preostalih 7 mesta (jer u bioskopu nije dozvoljeno sedenje u krilu), sledeći bilo koje od preostalih 6 mesta i tako do poslednjeg koji mora da sedne na jedino preostalo mesto. Prema tome, oni mogu da se rasporede na $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$ načina.

2.2. (*a*) Ako Javorka i Hrastiša sede jedno do drugog, to može biti na dva načina: JH ili HJ. Jasno je da je dovoljno utvrditi broj načina za slučaj JH, jer se u slučaju HJ dobija isti broj rasporeda. Dakle, pretpostavimo da Javorka i Hrastiša sede ovako: JH. Sada to tretiramo kao jedan paket [JH]. Neka su ostalih šest drugova A, B, C, D, E i F. Dakle, imamo ukupno 7 "paketa" koje treba da rasporedimo: A, B, C, D, E, F, [JH]. Koristeći ideju iz prethodnog zadatka vidimo da 7 "paketa" možemo da ispermutujemo na 7! načina. Dakle,

- raspored [JH]: 7! rasporeda
- raspored [HJ]: 7! rasporeda (isto kao gore)

UKUPNO: $2 \cdot 7!$ rasporeda.

(*b*) Da bismo videli koliko ima rasporeda kod kojih Javorka i Hrastiša NE sede jedno do drugog, od ukupnog broja rasporeda (što je 8!) treba oduzeti nepovoljne (kada Javorka i Hrastiša sede jedno do drugog). Dakle: $8! - 2 \cdot 7!$.

2.3. (*a*) Za prvu cifru pina imamo 10 mogućnosti ($0 \dots 9$), za drugu 9 (jer ne možemo da koristimo cifru koja se nalazi na prvom mestu), za treću 8 (jer smo iskoristili dve cifre) i za poslednju 7 mogućnosti. To nam daje ukupno $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ mogućnosti.

(*b*) Na $\binom{4}{2}$ načina možemo od četiri mesta za cifre u pinu da odaberemo dva na koja ćemo staviti cifru koja se ponavlja, a tu cifru možemo da odaberemo na 10 načina ($0 \dots 9$). Za treće mesto u pinu sada imamo 9 mogućnosti (sve cifre osim one koja je ponovljena), a za četvrto mesto 8 mogućnosti. To nam daje ukupno $\binom{4}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ mogućnosti.

2.4. Na $\binom{6}{3}$ načina možemo od šest mesta za cifre u pinu da odaberemo tri na koja ćemo staviti cifru 8, na $\binom{3}{2}$ načina možemo od tri preostala mesta da odaberemo dva na koja ćemo staviti cifru 6, pa na jedino nepopunjeno mesto stavljamo cifru 3. To nam daje ukupno $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 1$ mogućnosti.

2.5. Tim će se sastojati ili od dva biologa i jednog informatičara, ili od jednog biologa i dva informatičara. Ako se tim sastoji od dva biologa i jednog informatičara, od 5 biologa možemo odabrati dva za tim na $\binom{5}{2}$ načina, dok od 5 informatičara možemo odabrati jednog za tim na 5 načina. S druge strane, ako se tim sastoji od jednog biologa i dva informatičara, od 5 biologa možemo odabrati jednog za tim na 5 načina, dok od 5 informatičara možemo odabrati dva za tim na $\binom{5}{2}$ načina. Ukupno, takav tim se može odabrati na $\binom{5}{2} \cdot 5 + 5 \cdot \binom{5}{2}$ načina.

2.6. (*a*) Na tačno jedan način: u kružić se može upisati samo T.

(*b*) Na tačno jedan način: u kružiću u donjem redu može da se nalazi samo G, u prvom kružiću u gornjem redu može da se nalazi samo T, dok u drugom kružiću u gornjem redu može da se nalazi samo C.

(*c*) Na četiri načina: prva dva kružića u gornjem redu su jednoznačno određena (G i C), dok poslednji par može biti bilo koji od parova A-T, T-A, C-G, G-C.

(*d*) Na $4 \cdot 4 = 16$ načina: za drugi par imamo 4 mogućnosti (A-T, T-A, C-G, G-C), za poslednji par imamo takođe 4 mogućnosti, dok se preostala dva kružića mogu popuniti na tačno jedan način.

2.7. Za prvu cifru imamo 9 mogućnosti (jer nula ne sme da se javlja na prvom mestu), za svaku od preostalih cifara imamo 10 mogućnosti, dok za slovo u sredini imamo 7 mogućnosti. To nam daje ukupno $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ mogućnosti.

2.8. Takav broj može biti jednocifren, dvocifren, trocifren ili četvorocifren. Jednocifrenih brojeva ima 4, dvocifrenih $4 \cdot 3$, trocifrenih $4 \cdot 3 \cdot 2$ i četvorocifrenih $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Ukupno: $4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

2.9. Engleska abeceda ima 26 slova. Prema tome, broj različitih registracija je $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26$ jer prva cifra ne sme biti 0.

2.10. Rezonujemo slično kao u Zadatku 2.9 i dobijamo $26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10^5$ mogućnosti jer prva cifra ne sme biti 0, a iza dva slova sledi 6 cifara.

2.11. Na prvom mestu ovog broja stoji parna cifra koja ne sme biti nula, i zato za prvo mesto imamo 4 mogućnosti (2, 4, 6, 8). Za poslednje mesto imamo 5 mogućnosti (1, 3, 5, 7, 9), a za pretposlednje 4 (jer i tu treba da stoji neparna cifra, ali bez cifra koja je odabrana za poslednje mesto). Tako smo odabrali tri cifre, pa preostalih 7 cifara možemo da rasporedimo na 7! načina. Ukupno: $4 \cdot 7! \cdot 4 \cdot 5$.

2.12. (a) Od 8 osoba možemo odabrati 3 na $\binom{8}{3}$ načina.

(b) Od četiri žene možemo odabrati dve predstavnice na $\binom{4}{2}$ načina, dok od četiri muškarca možemo odabrati jednog predstavnika na 4 načina. Ukupno: $\binom{4}{2} \cdot 4$ načina.

(c) Od ukupnog broja komisija $\binom{8}{3}$ oduzećemo one koje ne odgovaraju uslovima zadatka. Komisiju koja ne odgovara uslovima zadatka pod (c) čine jedan bračni par i još jedna od preostalih 6 osoba. Bračni par možemo odabrati na 4 načina (jedan od četiri), dok još jednu od preostalih 6 osoba možemo odabrati na 6 načina. Zato komisija koje ne odgovaraju uslovima zadatka ima $4 \cdot 6$, pa "dobrih" komisija ima $\binom{8}{3} - 4 \cdot 6$.

2.13. Petocifrenih telefonskih brojeva ima $7 \cdot 10^4$ jer na prvom mestu ne smeju da se nalaze cifre 0, 1 i 9. Iz istog razloga šestocifrenih brojeva ima $7 \cdot 10^5$. Ukupno ih ima $7 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5$.

2.14. Za prvo mesto imamo 5 mogućnosti (a, e, i, o, u), a za peto mesto 4 mogućnosti jer smo jedan samoglasnik već iskoristili. Za drugo, treće i četvro mesto imamo imamo 21 mogućnost (sva slova osim a, e, i, o, u), i pri tome suglasnici smeju da se ponavljaju. Zato traženih reči ima $5 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 4$.

2.15. Zbir pet brojeva može biti paran broj samo u sledećim slučajevima: svih pet brojeva su parni; tri od tih pet brojeva su parni, a dva neparna; ili jedan broj je paran, a četiri neparna. Kako među brojevima $1, 2, \ldots, 100$ ima tačno 50 parnih i 50 neparnih, zaključujemo sledeće:

- pet parnih brojeva možemo odabrati na $\binom{50}{5}$ načina;
- tri parna i dva neparna broja možemo odabrati na $\binom{50}{3} \cdot \binom{50}{2}$ načina;
- jedan paran i četiri neparna broja možemo odabrati na $50 \cdot \binom{50}{4}$ načina.

Ukupno, takvih skupova ima $\binom{50}{5} + \binom{50}{3} \cdot \binom{50}{2} + 50 \cdot \binom{50}{4}$.

2.16. Podsetimo se: permutacija cifara $1, 2, 3, \ldots, 9$ je svaki niz u kome se svaka od cifara $1, 2, 3, \ldots, 9$ javlja tačno jednom. Na primer, 314258697 ili 638297145. Prema tome, ako u permutaciji nije 1 ispred 2, onda mora biti 2 ispred 1. Na primer, u permutaciji 638297145 nije 1 ispred 2, i zato je 2 ispred 1.

Primetimo sledeće: svakoj permutaciji u kojo je 2 ispred 1 može se jednoznačno dodeliti permutacija u kojoj je 1 ispred 2: samo cifre 1 i 2 zamene mesta. Na primer, 314258697 $\leftrightarrow$ 324158697 i 638297145 $\leftrightarrow$ 638197245. Odadtle sledi da tačno pola permutacija ima osobinu da je 1 ispred 2, dok druga polovina ima osobinu da je 2 ispred 1. Ilustrovaćemo ovo na manjem primeru gde se posmatraju permutacije cifara 1, 2, 3, 4:

$$\underbrace{\begin{matrix} 1234 & 1342 & 3124 & 4123 & 1243 & 1423 & 3142 & 4132 & 1324 & 1432 & 3412 & 4312 \\ 2134 & 2341 & 3214 & 4213 & 2143 & 2413 & 3241 & 4231 & 2314 & 2431 & 3421 & 4321 \end{matrix}}_{4!\text{permutacija}}$$

Vratimo se sada na osnovni problem: traženih permutacija ima $\frac{9!}{2}$ – polovina od ukupnog broja permutacija cifara 1, 2, ..., 9.

2.17. (a) 6^7. *Obrazloženje:* prvu perlicu možemo da odaberemo na 6 načina, drugu na 6 načina, ..., sedmu na 6 načina; pošto su izbori nezavisni to je ukupno $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^7$ načina.

(b) 2^7. *Obrazloženje:* isto kao gore, s tim da sada imamo samo dva moguća izbora za perlice.

(c) 6^4. *Obrazloženje:* Poslednja tri mesta su popunjena sa $\heartsuit\heartsuit\heartsuit$, pa treba da popunimo perlicama samo prva četiri mesta; kako nema ograničenja na izbor perlica, broj mogućnosti je $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$.

(d) 5^5. *Obrazloženje:* Na prvom i poslednjem mestu u nizu se javlja perlica $\triangle$, dok se na preostalih pet mesta može pojaviti bilo koja od preostalih 5 tipova perlica; broj mogućnosti je zato $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$.

(e) $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$. *Obrazloženje:* Od sedam mesta treba da odaberemo tri mesta na koja ćemo staviti perlicu $\square$, dok na preostala mesta stavljamo perlicu $\diamondsuit$. To možemo učiniti na $\binom{7}{3}$ načina.

2.18. Očigledno je da radno telo od 12 članova ne mogu da čine pripadnici samo jedne nacije (radno telo treba da ima 12 članova, a ima 9 Nemaca, 11 Francuza i 8 Belgijanaca). Zato radno telo za čiji rad nije potreban prevodilac mora imati bar jednog Belgijanca. Broj ovakvih radnih tela ćemo dobiti tako što ćemo od ukupnog broja načina na koji se može formirati grupa od 12 članova, $\binom{28}{12}$, oduzeti broj grupa u kojima ne učestvuju Belgijanci. Radnih grupa u kojima ne učestvuju Belgijanci ima $\binom{20}{12}$ zato što od 20 ljudi (9 Nemaca i 11 Francuza) biramo grupu od 12 članova. Rešenje zadatka je, prema tome, $\binom{28}{12} - \binom{20}{12}$.

2.19. Neka skup S čine svi pripdanici ove grupe koji imaju nadljudsku snagu, neka skup T čine svi Sitni osvetnici koji imaju mogućnost telekineze, a skup B oni koji imaju neverovatnu brzinu. Neki od sitnih osvetnika se može pojaviti u dva od ovih skupova, a oni koji imaju sve tri osobine će se pojaviti u sva tri skupa.

Zato što svaki Sitni osvetnik ima bar jednu od ove tri osobine mora biti $|S \cup T \cup B| = 62$. Pored toga znamo da je $|S| = 27$, $|T| = 25$ i $|B| = 33$. Prema Formuli uključenja-isključenja za tri skupa je:

$$|S \cup T \cup B| = |S| + |T| + |B| - |S \cap T| - |S \cap B| - |T \cap B| + |S \cap T \cap B|.$$

Mi treba da nađemo broj $n = |S \cap T \cap B|$. Kada u gornju relaciju zamenimo ono što znamo iz uslova zadatka, ona postaje:

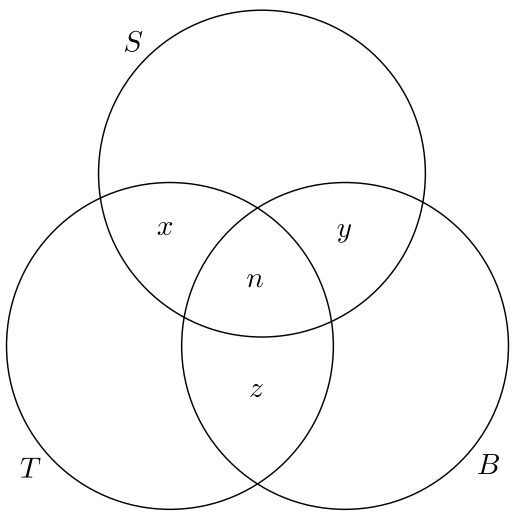
$$62 = 27 + 25 + 33 - |S \cap T| - |S \cap B| - |T \cap B| + n,$$

odnosno, nakon malo sređivanja:

$$n = |S \cap T| + |S \cap B| + |T \cap B| - 23. \tag{7.1}$$

Pored toga, mi znamo i da 15 Sitnih osvetnika ima tačno dve od ovih osobina. Da bismo iskoristili ovaj podatak pogledajmo sledeći Venov dijagram, gde su uvedene sledeće ove dodatne oznake:

- x je broj Sitnih osvetnika koji su u S i T, ali nisu u B,
- y je broj Sitnih osvetnika koji su u S i B, ali nisu u T, i
- z je broj Sitnih osvetnika koji su u B i T, ali nisu u S.



Uslov da 15 Sitnih osvetnika ima tačno dve od ovih osobina znači da je

$$x + y + z = 15.$$

Pored toga, sa dijagrama vidimo da je $|S \cap T| = x + n$, $|S \cap B| = y + n$ i $|T \cap B| = z + n$. Konačno:

$$\begin{aligned} n &= |S \cap T| + |S \cap B| + |T \cap B| - 23 \\ &= (x + n) + (y + n) + (z + n) - 23 \\ &= (x + y + z) + 3n - 23 \\ &= 15 + 3n - 23 = 3n - 8, \end{aligned}$$

odakle se dobija da je $n = 4$. Dakle, samo 4 Sitna osvetnika imaju sve tri osobine.

2.20. (a) Svaki put pokvarenog topa od polja označenog sa T do polja označenog sa X se može opisati nizom slova D (idi jedno polje nadesno) i G (idi jedno polje nagore) koji ima tačno sedam slova D i tačno sedam slova G. Naime, da bi stigao od polja T to polja X pokvareni top mora tačno sedam puta da ode jedno polje nadesno i tačno sedam puta da ode jedno polje nagore. Primetimo da redosled nije bitan: svaki niz dužine 14 u kome se svako od slova D i G javlja po 7 puta opisuje jedan validan put. Na primer, $DDDDDDDGGGGGGG$ opisuje put koji prvo ide udesno do kraja table, a onda nagore do kraja table, dok $DGDGDGDGDGDGDG$ opisuje put do polja X po dijagonali. Kako od 14 pozicija u nizu treba odabrati 7 na koje ćemo staviti slovo D, takvih puteva ima $\binom{14}{7}$.

(b) Da bi stigao od polja T do polja X, ali tako da obavezno prođe preko polja označenog sa A, pokvareni top prvo treba da stigne do polja A, što može učiniti na $\binom{5+2}{2}$ načina, a onda od polja A treba da stigne do polja X, što može učiniti opet na $\binom{5+2}{2}$ načina. Pošto se svaki put od T do A može iskombinovati sa svakim putem od A do X, ukupan broj načina da se od polja T stigne do polja X prelazeći preko polja A je $\binom{5+2}{2} \cdot \binom{5+2}{2}$.

(c) Da bismo odrediti broj načina na koje pokvareni top može stići od polja T do polja X, ali tako da nipošto ne prođe kroz polje označeno sa B, od ukupnog broja puteva koji vode od polja T do polja X oduzećemo broj nepovoljnih, a to su oni koji vode od T do X preko B. Ukupan broj puteva od T do X smo izračunali pod (a) i taj broj iznosi $\binom{14}{7}$. Primetimo, dalje, da je broj nepovoljnih puteva, odnosno, broj puteva koji vode od T do X preko polja B, jednak broju puteva koji vode od T do X preko polja A. Dakle, broj nepovoljnih puteva smo dobili u delu zadatka pod (b) i on iznosi $\binom{7}{2} \cdot \binom{7}{2}$. Prema tome, broj puteva koji vode od T do X ali ne prolaze preko polja B je $\binom{14}{7} - \binom{7}{2} \cdot \binom{7}{2}$.

3.1. Neka je m cena mleka bez uračunatog poreza, a c cena čokolade bez uračunatog poreza. Na mleko kao osnovnu životnu namirnicu se dodaje porez u visini od 10%, i zato je cena mleka u prodavnici data izrazom:

$$m' = m + \frac{10}{100}m = \frac{110}{100}m.$$

Kako je Hrastiša mleko u pradavnici platio 110 din, zaključujemo da je $m' = 110$, pa je $m = 100$. Dakle, na porez je otišlo 10 din od kupovine mleka.

Čokolada nije osnovna životna namirnica pa se na nju primenjuje porez u visini od 20%. Zato je cena čokolade u prodavnici data izrazom:

$$c' = c + \frac{20}{100}c = \frac{120}{100}c.$$

Kako je Hrastiša čokoladu u pradavnici platio 480 din, zaključujemo da je $c' = 480$, pa je $c = 400$. Dakle, na porez je otišlo 80 din od kupovine čokolade.

Od cele Hrastišine kupovine na porez je, prema tome, otišlo $10 + 80 = 90$ din.

3.2. Nabavna cena konzole je 5000 din. Carina iznosi 10% od nabavne cene, što je $5000 \cdot \frac{10}{100} = 500$ din. Zato je cena konzole nakon carinjenja 5500 din. Tako ocarinjeni proizvod se sada oporezuje porezom u visini 20%. Porez iznosi $5500 \cdot \frac{20}{100} = 5500 \cdot \frac{1}{5} = 1100$ dinara. Konačna cena se dobija kada se na ocarinjeni proizvod doda porez: $5500 + 1100 = 6600$ dinara. Krajnji kupac će konzolu platiti po ceni od 6600 dinara.

3.3. (a) Neka je u toj generaciji bilo n učenika. Osnovni nivo standarda je postiglo samo 34% generacije, odnosno, 20 400 učenika, što znači da je

$$n \cdot \frac{34}{100} = 20\,400.$$

Zato je

$$n = 20\,400 \cdot \frac{100}{2 \cdot 17} = \frac{20\,400}{17} \cdot 50 = 1\,200 \cdot 50 = 60\,000.$$

(b) Prema standardima postignuća očekivalo se da će najmanje 80% generacije da postigne osnovni nivo. Dakle, očekivalo se da će najmanje

$$60\,000 \cdot \frac{80}{100} = 48\,000$$

učenika postići osnovni nivo.

3.4. (a) Radi se o osobi koja je visoka 2 m i ima 100 kg i zato je njen BMI jednak sa

$$\mathrm{BMI} = \frac{\text{masa u kilogramima}}{(\text{visina u metrima})^2} = \frac{100}{2^2} = 25.$$

Prema tabeli, radi se o osobi koja ima uvećanu težinu.

(b) U ovom slučaju se radi o osobi koja je visoka 1,75 m i ima 49 kg i njen BMI je:

$$\mathrm{BMI} = \frac{49}{1{,}75^2} = \frac{49}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{49 \cdot 16}{49} = 16.$$

Prema tabeli, radi se o osobi koja je neuhranjena.

3.5. Obzirom da prihvatljive dimenzije ne smeju da odstupaju više od 1% od idealnih, odstupanje prečnika od idealnog *ne sme da bude veće od*

$$20 \text{ mm} \cdot \frac{1}{100} = 0{,}2 \text{ mm},$$

dok odstupanje dužine od idealne *ne sme da bude veće od*

$$1000 \text{ mm} \cdot \frac{1}{100} = 10 \text{ mm}.$$

Dobavljač	d [mm]	L [mm]	Prihvatljivo?	Odgovor
Axios d.o.o.	21,00	1001,00	DA NE	NE, jer dijametar odstupa za 1 mm>0,2 mm
Bexios d.o.o.	20,20	1010,00	DA NE	DA
Radionica „Kurbla”	19,95	999,00	DA NE	DA

3.6. (a) Obračun za Hrastišin službeni put:

Datum	Sati na putu
16.01.2024.	4h
17.01.2024.	24h
18.01.2024.	24h
19.01.2024.	24h
20.01.2024.	11h

Vidimo da je Hrastiša na službenom putu proveo $3 \cdot 24\text{h} + 15\text{h}$, pa će mu, prema navedenim pravilima, biti isplaćene četiri dnevnice, odnosno, ukupno 6 400,00 din.

(b) Obračun za Javorkin službeni put:

Datum	Sati na putu
26.02.2024.	11h
27.02.2024.	24h
28.02.2024.	24h
29.02.2024.	24h ← **Pažnja! 2024. je prestupna godina!**
01.03.2024.	24h
02.03.2024.	15h

Vidimo da je Javorka na službenom putu provela $4 \cdot 24\text{h} + 26\text{h} = 5 \cdot 24\text{h} + 2\text{h}$, pa će joj, prema navedenim pravilima, biti isplaćeno pet dnevnica, odnosno, ukupno 8 000,00 din.

3.7. Primetimo, prvo, da je Hrastiša zaradio više od \$100.000 jer se na zarade do \$100.000 plati najviše \$27.000 poreza (30% na sve preko \$10.000, što je maksimalno $\$90.000 \cdot \frac{30}{100} = \$27.000$). Zato prilikom obračuna poreza na Hrastišinu zaradu primenjena poslednja formula, pa dobijamo da je:

$$\$90.000 \cdot 30\% + (z - \$100.000) \cdot 60\% = \$87.000,$$

gde je z Hrastišina zarada u prošloj godini. Rešimo gornju jednačinu po z:

$$\begin{aligned} \$27.000 + (z - \$100.000) \cdot \frac{60}{100} &= \$87.000 \\ (z - \$100.000) \cdot \frac{60}{100} &= \$60.000 \\ z - \$100.000 &= \$60.000 \cdot \frac{100}{60} \\ z - \$100.000 &= \$100.000 \\ z &= \$200.000 \end{aligned}$$

Hrastiša je u prošloj godini zaradio \$200.000.

3.8. Pretvorićemo prvo dužinu jahte u inče:

- 138 jardi $= 138 \cdot 3$ stope $= 414$ stopa $= 414 \cdot 12$ inča $= 4968$ inča;
- 2 stope i 8 inča $= 2 \cdot 12 + 8$ inča $= 32$ inča.

Dakle, ukupna dužina jahte u inčima je $4968 + 32 = 5000$. Sada ćemo 5000 inča konvertovati u metre:

$$\frac{5000 \cdot 2{,}54 \text{ cm}}{100} = \frac{12\,700 \text{ cm}}{100} = 127 \text{ m}.$$

Jahta je dugačka 127 m.

3.9. Reč BIOINFORMATIKA ima 14 slova. Ona je ispisana na ekran 100 puta bez razmaka. Dakle, na ekran je ispisati 1400 simbola. Pošto u jedan red staje 80 simbola, podelićemo celobrojno 1400 sa 80, pa dobijamo da je količnik 17 i ostatak 40. Drugim rečima:

$$1400 = 17 \cdot 80 + 40.$$

(a) Program je ispisao ukupno 18 redova: 17 punih redova ($17 \cdot 80$), i još 40 simbola u 18. redu.

(b) U poslednjem, 18. redu, ima 40 slova. Kako reč BIOINFORMATIKA ima 14 slova, poslednji red sadrži poslednjih 12 slova reči BIOINFORMATIKA i još dva puta celu reč:

$$\underbrace{\text{OINFORMATIKA}}_{12}\underbrace{\text{BIOINFORMATIKA}}_{14}\underbrace{\text{BIOINFORMATIKA}}_{14}$$

3.10. (a) 14. *Obrazloženje:* Program će ispisati $150 \cdot 7 = 1050$ slova jedno za drugim. Kako jedan red ima dužinu 80, kada podelimo 1050 sa 80 dobijamo količnik 13 i ostatak 10. Dakle, program će ispisati 13 punih redova i još 10 slova u 14. redu. Ukupno: 14 redova.

(b) SADNOVISAD *Obrazloženje:* Program će ispisati $230 \cdot 7 = 1610$ slova jedno za drugim. Kako jedan red ima dužinu 80, kada podelimo 1610 sa 80 dobijamo količnik 20 i ostatak 10. Dakle, program će ispisati 20 punih redova i još 10 slova u 21. redu. Poslednjih 10 slova su: SADNOVISAD

3.11. Od 150 učenika u generaciji niko nije dobio ocenu 1, 42 učenika su dobila ocenu 2, a 48 učenika je dobilo ocenu 3. Dakle, 90 učenika je dobilo ocenu 2 ili 3, što znači da je preostalih 60 učenika dobilo ocenu 4 ili 5. Neka je njih k dobilo ocenu 5, a $60 - k$ ocenu 4. Prosečna ocena generacije se tada izražava sledećim izrazom:

$$\frac{2 \cdot 42 + 3 \cdot 48 + 4(60 - k) + 5k}{150}.$$

Treba da odredimo k koje će garantovati da je prosečna ocena generacije barem 3,5. Zato treba rešiti nejednačinu:

$$\frac{2 \cdot 42 + 3 \cdot 48 + 4(60 - k) + 5k}{150} \geqslant 3{,}5.$$

Rešavanjem ove nejednačine dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 42 + 3 \cdot 48 + 4(60 - k) + 5k}{150} &\geqslant 3{,}5 \\ 2 \cdot 42 + 3 \cdot 48 + 4(60 - k) + 5k &\geqslant 3{,}5 \cdot 150 \\ 84 + 144 + 240 + k &\geqslant 525 \\ k &\geqslant 57. \end{aligned}$$

Dakle, barem 57 učenika u generaciji treba da dobije ocenu 5 da bi prosek cele generacije bio barem 3,5.

3.12. Neka je x iznos novca koji će kompanija deponovati u banku, y iznos za koji će kupiti državne obveznice, a z iznos koji će uložiti u akcije. Pošto kompanija želi da uloži tačno 120.000 EUR na jedan od ova tri načina, mora biti

$$x + y + z = 120\,000.$$

Kako novac deponovan u banku donosi 2% dobiti godišnje, obveznice donose 5% godiv snje, a akcije čak 9% i kako kompanija želi da na ovaj način godišnje zaradi 5.500 EUR, mora biti:

$$\frac{2}{100}x + \frac{5}{100}y + \frac{9}{100}z = 5\,500.$$

Konačno, kompanija želi da uloži dva puta više novca u banku uloži nego u akcije, pa je:

$$x = 2z.$$

Ako $x = 2z$ uvrstimo u prve dve jdnačine dobijamo ovakav sistem jednačina:

$$y + 3z = 120\,000 \qquad \text{i} \qquad \frac{5}{100}y + \frac{13}{100}z = 5\,500,$$

odnosno,

$$y + 3z = 120\,000 \qquad \text{i} \qquad 5y + 13z = 550\,000.$$

Iz prve jednačine je $y = 120\,000 - 3z$, pa uvrštavanjem u drugu dobijamo:

$$\begin{aligned} 5(120\,000 - 3z) + 13z &= 550\,000 \\ 600\,000 - 15z + 13z &= 550\,000 \\ 2z &= 50\,000 \\ z &= 25\,000. \end{aligned}$$

Dakle, u akcije treba uložiti $z = 25\,000$ EUR, u državne obveznice $y = 120\,000 - 3z = 45\,000$ EUR, a u banku treba deponovati $x = 2z = 50\,000$ EUR.

3.13. Neka je M cena minuta razgovora sa Mađarskom, A cena minuta razgovora sa Austrijom, a N cena minuta razgovora sa Nemačkom. Tada podacima iz tabele

Mesec	Razgovori sa Mađarskom (min)	Razgovori sa Austrijom (min)	Razgovori sa Nemačkom (min)	Račun (din)
Septembar	90	120	180	2520
Oktobar	70	100	120	1840
Novembar	50	110	150	2060

odgovara sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 90M + 120A + 180N &= 2520 \\ 70M + 100A + 120N &= 1840 \\ 50M + 110A + 150N &= 2060 \end{aligned}$$

Sistem možemo znatno pojednostaviti tako što ćemo prvu jednačinu podeliti sa 30, a drugu i treću sa 10:

$$\begin{aligned} 3M + 4A + 6N &= 84 \\ 7M + 10A + 12N &= 184 \\ 5M + 11A + 15N &= 206 \end{aligned}$$

Sistem ćemo rešiti Gausovom metodom eliminacije. Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo drugoj, dobijamo:

$$\begin{aligned} 3M+\ 4A+\ 6N &= \ 84 \\ M+\ 2A \qquad\ &= \ 16 \\ 5M+11A+15N &= 206 \end{aligned}$$

Druga jednačina je sada “najlepša”, pa ćemo je prebaciti na prvo mesto i njom eliminisati promenljivu M iz ostalih jednačina sistema:

$$\begin{aligned} M+2A \qquad\ &= \ 16 \\ -2A+\ 6N &= \ 36 \\ A+15N &= 126 \end{aligned}$$

Sada je treća jednačina “lepša” od poslednje dve, pa ćemo je dovesti na drugo mesto i njom eliminisati A iz one druge:

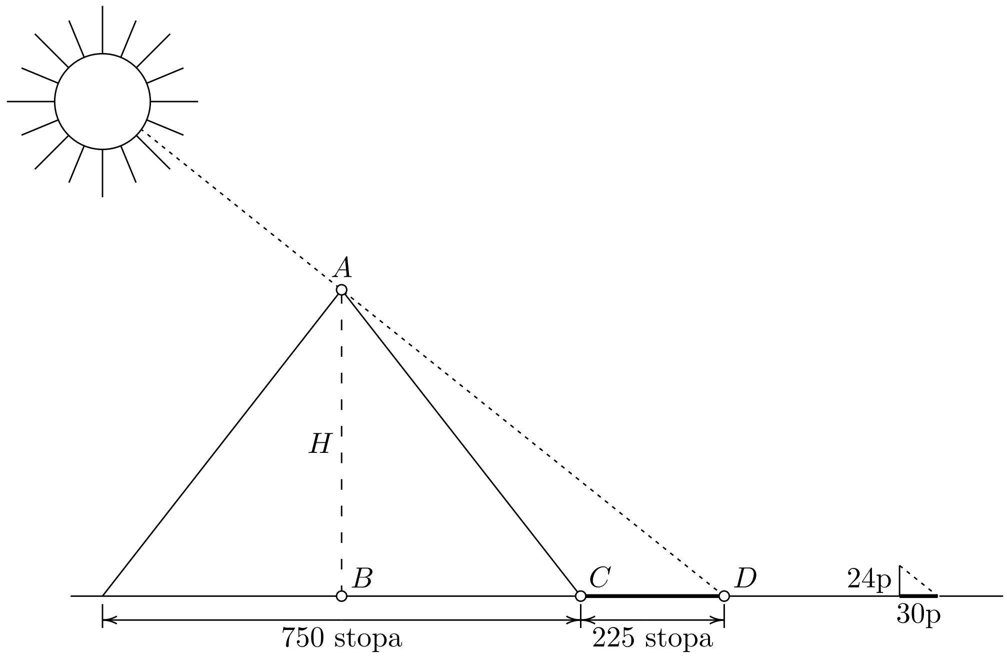
$$\begin{aligned} M+2A \qquad\ &= \ 16 \\ A+15N &= 126 \\ 36N &= 288 \end{aligned}$$

Iz poslenje jednačine je $N = 8$, iz pretposlednje je $A = 126 - 15N = 6$ i iz prve je $M = 16 - 2A = 4$.

Dakle, Hrastiši su razgovore sa Mađarskom naplaćivali 4 din/min (umesto obećanih 3), razgovore sa Austrijom su mu naplaćivali 6 din/min (umesto obećanih 5), a razgovore sa Nemačkom su mu naplaćivali 8 din/min (umesto obećanih 7).

4.1. (a) Zato što se radi o pravoj pravilnoj četvorostranoj piramidi znamo da je BC jednako dužini polovine osnovice, i zato je $BD = 325 + 225 = 600$ stopa. Trougao ABC je sličan trouglu koga čine štap i njegova senka i zato je

$$\frac{H}{BD} = \frac{24}{30} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{24 \cdot 600}{30} = 480.$$



(b) Sadašnja visina piramide predstavlja p procenata originalne visine. Zato je

$$450 = 480 \cdot \frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad p = 93{,}75.$$

Kako sadašnja visina predstavlja 93,75% originalne visine, radi se o smanjenju od 6,25%.

4.2. Neka je d rastojanje tačke C od baze A. Iz pravouglog trougla ACI (I je teme trougla u kome se nalazi helikopter *Ingenuity*) imamo da je

$$\frac{d}{200\,m} = \text{kotangens elevacionog ugla} = \operatorname{ctg} 9^\circ 50'.$$

Iz priložene tabele vidimo da je ctg $9^\circ 50' = 5{,}769$ i tako dobijamo:

$$d = 5,769 \cdot 200\ m = 1\,153{,}8\ m.$$

4.3. Neka je d rastojanje tačke C od baze A. Iz pravouglog trougla ABC imamo da je

$$\frac{d}{1000\,m} = \operatorname{tg} \angle ABC = \operatorname{tg}(90^\circ - 9^\circ 50') = \operatorname{tg} 80^\circ 10'.$$

Iz priložene tabele vidimo da je tg $80^\circ 10' = 5{,}769$ i tako dobijamo:

$$d = 5,769 \cdot 1000\ m = 5\,769\ m.$$

4.4. Reženje ovog zadatka se svodi na to da se dva puta primeni ideja Zadatka 4.3. Neka je d_1 rastojanje broja od luke prilikom prvog posmatranja, a d_2 rastojanje broda od luke prilikom drugog posmatranja. Za prvo posmatranje imamo da je

$$\frac{d_1}{100\,m} = \operatorname{tg}(90^\circ - 5^\circ) = \operatorname{tg} 85^\circ = 11{,}43,$$

i zato je

$$d_1 = 100\,m \cdot 11{,}43 = 1\,143\,m.$$

Za drugo posmatranje imamo da je

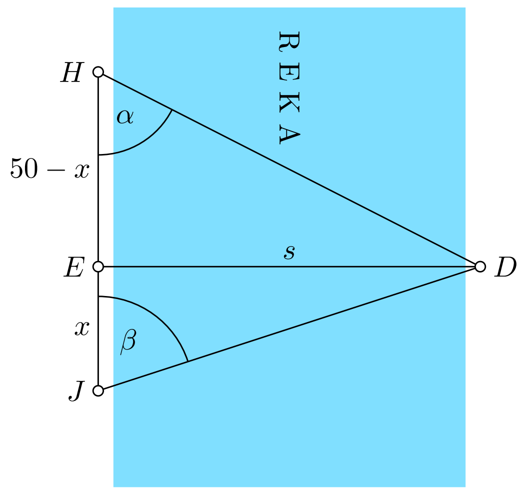
$$\frac{d_2}{100\,m} = \operatorname{tg}(90^\circ - 20^\circ 30') = \operatorname{tg} 69^\circ 30' = 2{,}67,$$

i zato je

$$d_2 = 100\,m \cdot 2{,}67 = 267\,m.$$

Prema tome, između ova dva osmatranja brod je prešao rastojanje od $d_1 - d_2 = 1\,143\,m - 267\,m = 876\,m$.

4.5. Neka je D tačka u kojoj se nalazi drvo, H tačka u kojoj se nalazi Hrastiša, J tačka u kojoj se nalazi Javorka, a E podnožje normale iz D na pravu HJ. Neka je $|EJ| = x$. Tada je $|EH| = 50 - x$ jer Javorka i Hrastiša stoje na rastojanju od 50 m. Neka je $s = |DE|$ širina reke. Tada iz pravouglih trouglova DEH i DEJ, konsultujući pri tome priloženu tabelu, vidimo da je



$$\frac{s}{50 - x} = \operatorname{tg} 63^\circ\, 26'\, 6'' = 2$$

i

$$\frac{s}{x} = \operatorname{tg} 71^\circ\, 33'\, 54'' = 3.$$

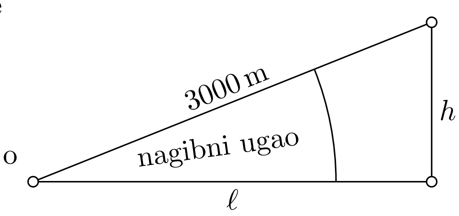
Drugim rečima, dobijamo sistem jednačina

$$s = 2 \cdot (50 - x) \qquad \text{i} \qquad s = 3x,$$

čije rešenje je $x = 20$ i $s = 60$. Prema tome, reka je široka 60 m.

4.6. Kako je u zadatku navedeno, u ovoj situaciji je kosinus nagibnog ugla približno jednak 1, što znači da je

$$\frac{\ell}{3\,000\,m} \approx 1.$$

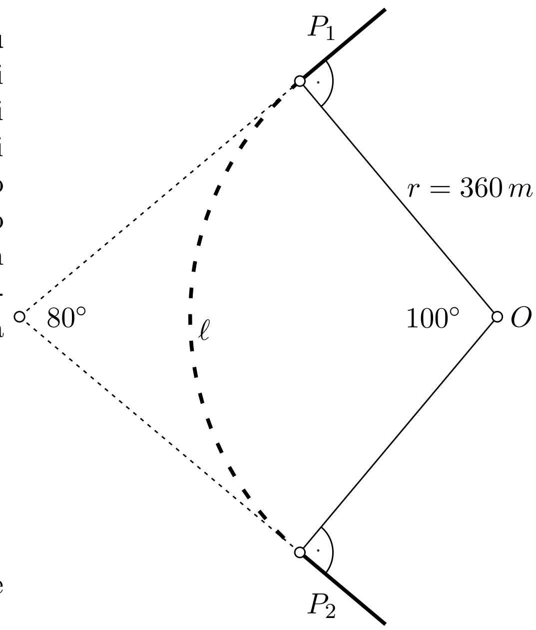


Odatle zaključujemo da je $\ell \approx 3\,000\,m$. Kako se radi o nagibu od 3% dobijamo da je

$$\frac{h}{\ell} = \frac{3}{100},$$

pa kako je $\ell \approx 3\,000\,m$ sledi da je $h \approx \frac{3}{100} \cdot 3\,000\,m = 90\,m$. Dakle, automobil je savladao visinu od približno 90 m.

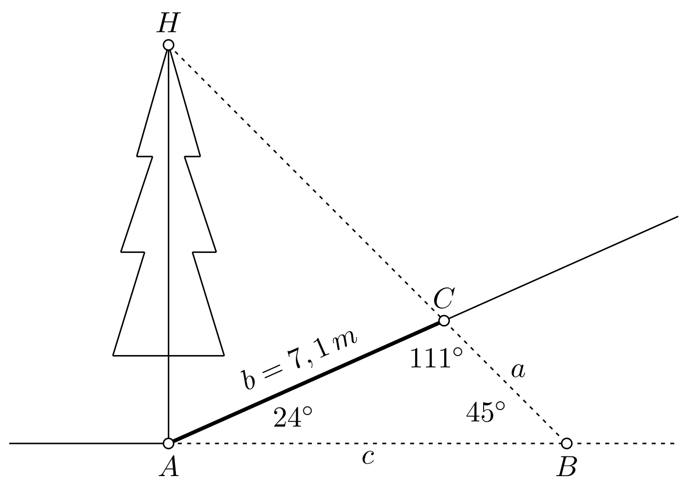
4.7. Da bi voz mogao "glatko" da uđe u krivinu (i iz nje da izađe) kružni luk kojim se krakovi spajaju mora biti deo kruga na koga su krakovi tangentni. To znači da su u četvorouglu na slici uglovi kod tačaka P_1 i P_2 pravi, pa kako je ugao kod trećeg temena jednak 80°, sledi da je ugao kod O jednak 100°. Dakle, radi se o kružnom luku na krugu poluprečnika $r = 360\,m$ koji odgovara centralnom uglu od 100°. Zato se dužina ℓ ovog luka može odrediti ovako:



$$\begin{aligned}\ell &= \text{obim kruga} \cdot \frac{100^\circ}{360^\circ} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{100^\circ}{360^\circ}\\ &= 2 \cdot 360\,m \cdot \pi \cdot \frac{100^\circ}{360^\circ} = 200 \cdot \pi \approx 628\,m.\end{aligned}$$

Dužina luka koji spaja ova dva kraka pruge je približno 628 m.

4.8. Pošto u zadatku piše da drvo raste pravo u vis, trougao ABH na slici ispod je jednakokraki pravougli sa pravim uglom kod temena A:



pa je visina drveta $= |AH| = |AB|$. Dužinu $|AB|$ možemo odrediti iz trougla ABC na osnovu sinusne teoreme:

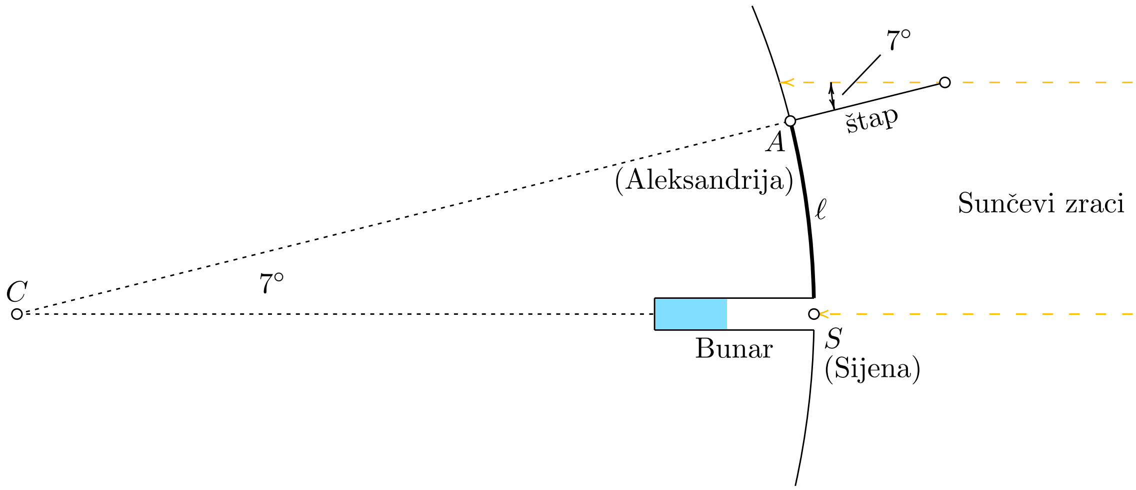
$$\frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}, \quad \text{odnosno} \quad \frac{7{,}1}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 111^\circ}.$$

Prema tome, uz pomoć podataka koji su navedeni u tabeli,

$$|AB| = c = \frac{7{,}1}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 111^\circ = \frac{7{,}1}{0{,}71} \cdot 0{,}93 = 10 \cdot 0{,}93 = 9{,}3\,m.$$

Drvo je visoko 9,3 m.

4.9. (a) Činjenica da na letnji solsticijum štap poboden okomito u tle u Aleksandriji baca senku pod uglom od 7° znači da se luk od Aleksandrije do Sijene iz centra C Zemlje vidi pod uglom od 7°.



Dakle, luk $\ell = 4\,900$ stadija odgovara uglu od $7°$, a obim Zemlje uglu od $360°$, pa dobijamo proporciju:

$$O : 360° = \ell : 7°.$$

Odatle je $O = \frac{360°}{7°} \cdot 4,900 = 252\,000$ stadija.

(b) Kako 1 stadion odgovara rastojanju od 165 m dobijamo

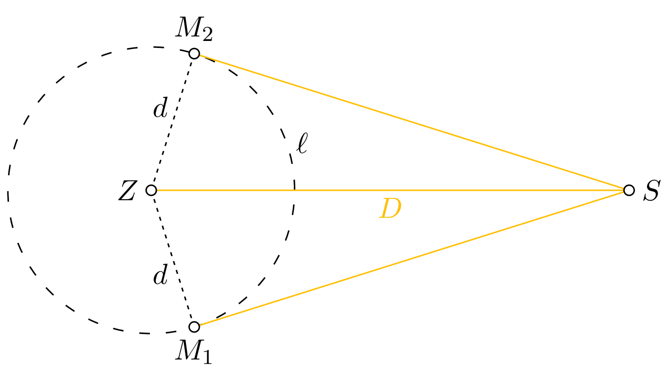
$$O = \frac{252\,000 \cdot 165}{1000} = 41\,580\ km.$$

(c) Kako je $\dfrac{41\,580}{40\,075} \approx 1,038$ vidimo da je Eratosten dobio vrednost koja je 3,8% veća od tačne vrednosti.

4.10. Neka je $d = |ZM_1| = |ZM_2|$ rastojanje od Zemlje do Meseca, a $D = |ZS|$ rastojanje od Zemlje do Sunca. Tada je

$$\frac{d}{D} = \cos\alpha$$

zato što je trougao ZSM_2 pravougli sa pravim uglom kod temena M_2.



Ugao α je polovina ugla $\angle M_1ZM_2$ koji odgovara luku ℓ koga Mesec pređe za 14 dana 17 sati i 26 minuta. Kako Mesecu treba 29 dana i 12 sati da napravi pun krug oko Zemlje, ugao $\angle M_1ZM_2$ možemo da odredimo iz proporcije:

$$\frac{14 \text{ dana } 17\text{h } 26\text{min}}{29 \text{ dana } 12\text{h}} = \frac{\angle M_1ZM_2}{360°}.$$

Dakle,

$$\angle M_1 Z M_2 \approx 360^\circ \cdot \frac{14{,}7264}{29{,}5} = 179{,}712^\circ,$$

pa je

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\angle M_1 Z M_2 = 89{,}856^\circ.$$

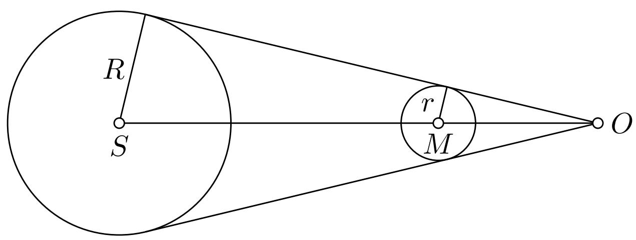
Odatle dobijamo:

$$\frac{D}{d} = \frac{1}{\cos\alpha} \approx 398.$$

Dakle, Sunce je oko 400 puta dalje od Zemlje nego što je to Mesec.

4.11. (a) Neka je R poluprečnik Sunca, a r poluprečnik Meseca. Na osnovu sličnosti trouglova lako se vidi da je

$$\frac{R}{r} = \frac{|SO|}{|MO|},$$

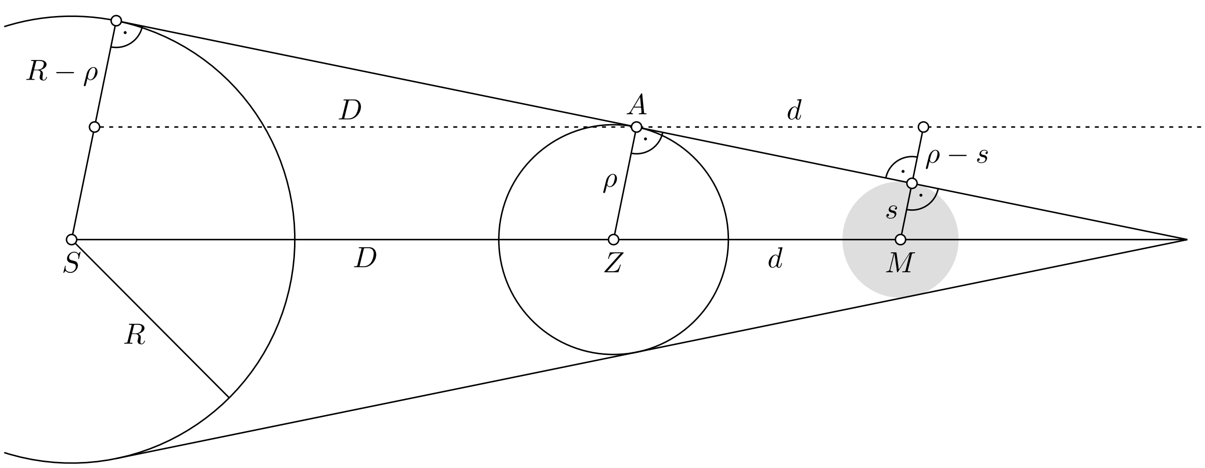


gde je O oko posmatrača. Pošto se posmatrač nalazi na površini Zemlje mi ne znamo rastojanja $|SO|$ i $|MO|$. Međutim, u Zadatku 4.10 smo izračunali odnos $\frac{|SZ|}{|MZ|}$ gde je Z centar Zemlje. Zato ćemo uzeti da je

$$\frac{R}{r} = \frac{|SO|}{|MO|} \approx \frac{|SZ|}{|MZ|} \approx 398.$$

Dakle, prečnik Sunca je oko 400 puta veći od prečnika Meseca.

(b) Kada dođe do pomračenja Meseca, Sunce, Zemlja i Mesec su poravnati ovako:



Neka je S centar Sunca, Z centar Zemlje i M centar Meseca. Dalje, neka je $D = |SZ|$ rastojanje Sunca od Zemlje, $d = |MZ|$ rastojanje Meseca od Zemlje, R poluprečnik Sunca, $\rho = 6370$ poluprečnik Zemlje i s poluprečnik Mesečeve senke (na crtežu nije prikazan Mesec već njegova senka). Neka zajednička tangenta ova tri kruga dodiruje Zemljin disk u tački A. Kroz tačku A povcimo pravu paralelnu pravoj SZ. Tako nastaju dva nova pravougla trougla: jedan sa hipotenuzom D i kraćom katetom $R-\rho$ i drugi sa hipotenuzom d i kraćom katetom $\rho - s$. Zato što su ta dva trougla slični dobijamo

$$\frac{R-\rho}{D} = \frac{\rho - s}{d},$$

odnosno,

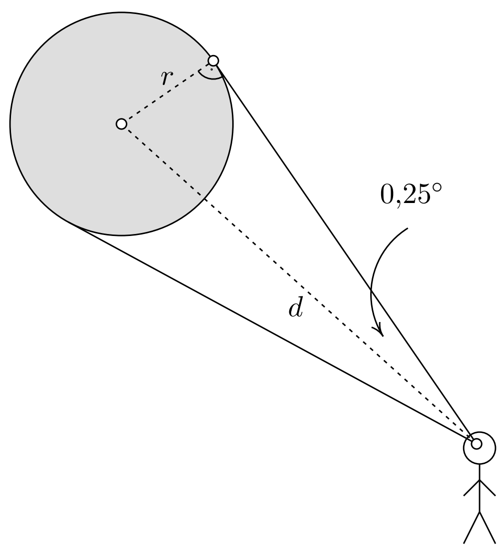
$$\frac{R-\rho}{\rho - s} = \frac{D}{d}.$$

Neka je r poluprečnik Meseca. Znamo da je $R \approx 400r$ (videti pod (a)) i da je $s \approx 8r/3$. Pored toga znamo da je $\rho = 6370\,km$, kao i da je $D/d \approx 400$ (Zadatak 4.10). Kada sve ovo uvrstimo u gornju jednakost dobijamo:

$$\frac{400r - 6370}{6370 - \frac{8r}{3}} \approx 400.$$

Rešavanjem po r dobijamo $r \approx 1741km$. Dakle, poluprečnik Meseca je približno 1741 km, pa je onda poluprečnik Sunca $R \approx 400 \cdot 1741 = 696\,400\ km$.

(c) Na osnovu pravouglog trougla na slici:



vidimo da je

$$\frac{r}{d} = \sin 0{,}25^\circ,$$

gde je r poluprečnik Meseca, a d rastojanje Meseca od Zemlje (doboro, rastojanje Meseca od posmatrača, ali zato se u zadatku traži procena). Prema tome,

$$d \approx 399\,009\ km,$$

pa je rastojanje Sunca od Zemlje dato sa

$$D \approx 400 \cdot r = 159\,603\,600\ km.$$

(d) Prilikom aproksimacija koje smo pravili napravili smo sledeće greške:

- poluprečnik Meseca je $1\,738$ km, a dobili smo $1\,741$ km; kako je $\frac{1\,741}{1\,738} = 1{,}0017$ napravili smo relativnu grešku manju od 0,2%.
- poluprečnik Sunca je $696\,000$ km, a dobili smo $696\,400$ km; kako je $\frac{696\,400}{696\,000} = 1{,}00057$ napravili smo relativnu grešku manju od 0,1%.
- rastojanje Meseca od Zemlje je $384\,400$ km, a dobili smo $399\,009$ km; kako je $\frac{399\,009}{384\,400} = 1{,}038$ napravili smo relativnu grešku manju od 4%.
- Rastojanje Sunca od Zemlje je $149\,600\,000$ km, a dobili smo $\frac{159\,603\,600}{149\,600\,000} = 1{,}067$ napravili smo relativnu grešku manju od 7%.

5.1. (a) Najmanji uvoz ima I - Idimidođija.

(b) Najveći izvoz ima N - Neoplantija.

(c) Najveći spoljnotrgovinski deficit ima M - Maketanija.

(d) Najveći spoljnotrgovinski suficit ima N - Neoplantija.

(e) Pošto se na x-osi grafika nalaze podaci o izvozu, a na y-osi grafika podaci o uvozu, država ima spoljnotrgovinski suficit ako za njene koordinate važi $x > y$, a ima spoljnotrgovinski deficit ako za njene koordinate važi $x < y$. Prema tome, one prve od ovih drugih razdvaja prava čija jednačina je $y = x$.

5.2. (a) Direktnim očitavanjem sa grafika vidimo da ako u reklamu uloži $600\,000$ dolara zarada kompanije će iznositi $4\,000\,000$ dolara.

(b) Direktnim očitavanjem sa grafika vidimo sledeće: da bi zarada kompanije bila $3\,000\,000$ dolara u reklamu treba uložiti najmanje $300\,000$ dolara.

(c) Sa grafika lako vidimo sledeće: ako je $u = 300\,000$ onda je $z = 3\,000\,000$, a ako je $u = 600\,000$ onda je $z = 4\,000\,000$. Zato parametri a i b zadovoljavaju sledeće veze:

$$300\,000 \cdot a + b = 3\,000\,000$$
$$600\,000 \cdot a + b = 4\,000\,000.$$

Da bismo rešili ovaj sistem jednačina možemo prvu jednačinu oduzeti od druge. Tako dobijamo:

$$300\,000 \cdot a = 1\,000\,000$$

odakle je $a = \frac{10}{3}$. Kada ovu vrednost za a uvrstimo u prvu jednačinu dobijamo

$$300\,000 \cdot \frac{10}{3} + b = 3\,000\,000,$$

odakle je $b = 2\,000\,000$. Dakle, formula koja opisuje ovaj proces je data sa

$$z = \frac{10}{3} \cdot u + 2\,000\,000.$$

5.3. Označimo sa x broj aknuta, a sa y broj blambova koje ekspedicija treba da ponese na Zemlju. Da bi blambovi imali dovoljno zedorona, mora biti

$$3x \geqslant 5y,$$

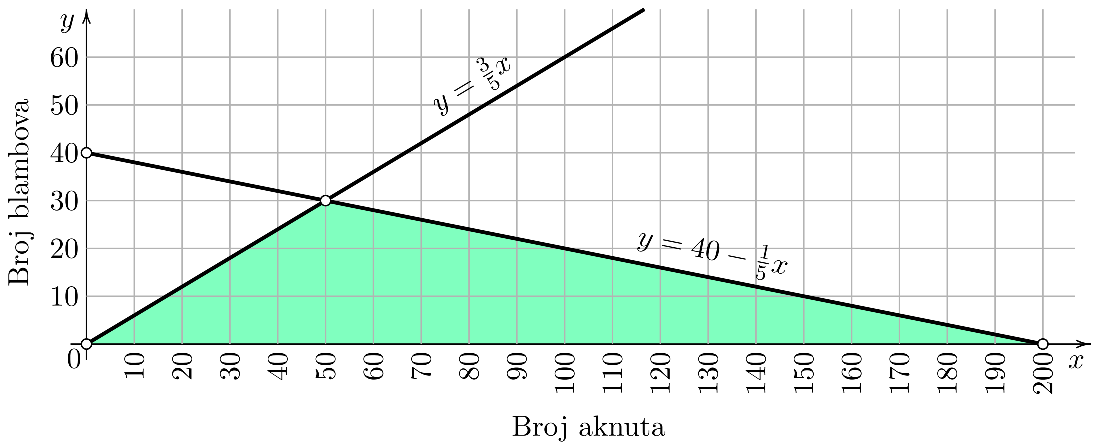
jer jedan aknut proizvodi 3 ml zedorona dnevno, dok jedan blamb popije 5 ml zedorona dnevno. Kako je količina mikulaksa ograničena na 2 litre dnevno, što je 2000 ml dnevno, i kako jedan aknut popije 10 ml mikulaksa dnevno, dok jedan blamb popije 50 ml mikulaksa dnevno, mora se voditi računa i o sledećem ograničenju:

$$10x + 50y \leqslant 2000.$$

Dva navedena ograničenja se mogu iskazati u sledećem, ekvivalentnom ali tehnički pogodnijem obliku:

$$y \leqslant \frac{3}{5}x \quad \text{i} \quad y \leqslant 40 - \frac{1}{5}x.$$

Deo koordinatne ravni koji zadovoljava obe nejednakosti osenčen je na sledećem dijagramu zelenom bojom:



Sa dijagrama se odmah vidi da pod navedenim ograničenjima ekspedicija na Zemlju može da ponese najviše 30 blambova, i za to im treba najmanje 50 aknuta da ih prehranjuju zedoronom.

5.4. Funkcija $h(t)$ predstavlja visinu na kojoj se nalazi strela nakon t sekundi leta. Prema uslovima zadatka, nakon jedne sekunde od ispaljivanja strela je stigla do vrha kule koja je visoka 70 m što možemo zapisati ovako:

$$h(1) = 70, \text{ odnosno, } -\frac{1}{2}g + v_0 + h_0 = 70.$$

Nakon sedam sekundi od ispaljivanja strela je prošla pored prozora kroz koga je ispaljena, što možemo zapisati ovako:

$$h(7) = h_0, \text{ odnosno, } -\frac{1}{2}g \cdot 49 + 7v_0 + h_0 = h_0.$$

Jednu sekundu kasnije, dakle posle 8 sekundi leta, strela je pala na zemlju što znači da je

$$h(8) = 0, \text{ odnosno, } -\frac{1}{2}g \cdot 64 + 8v_0 + h_0 = 0.$$

Tako smo dobili sistem jednačina

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g + v_0 + h_0 &= 70 \\ -\frac{1}{2}g \cdot 49 + 7v_0 + h_0 &= h_0 \\ -\frac{1}{2}g \cdot 64 + 8v_0 + h_0 &= 0. \end{aligned}$$

Prvu i drugu jednačinu ćemo pomnožiti sa 2 da bismo se oslobodili razlomka, i primetićemo da se u drugoj jednačini potiru sabirci koji sadrže h_0. Tako doijamo:

$$\begin{aligned} -g + \ \ 2v_0 + 2h_0 &= 140 \\ -49g + 14v_0 \qquad\quad &= \ \ 0 \\ -32g + \ \ 8v_0 + \ \ h_0 &= \ \ 0. \end{aligned}$$

Ako treću jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo prvoj dobijamo:

$$\begin{aligned} 63g - 14v_0 \qquad\quad &= 140 \\ -49g + 14v_0 \qquad\quad &= \ \ 0 \\ -32g + \ \ 8v_0 + h_0 &= \ \ 0. \end{aligned}$$

Konačno, sabiranjem prve i druge jednačine dobijamo $14g = 140$, odakle je $g = 10$. Tako smo izračunali gravitaciono ubrzanje Mordora.

Iako smo rešili zadatak onog trenutka kada smo izračunali g, iz čiste radoznalosti izračunaćemo još i početnu brzinu strele v_0, kao i visinu h_0 na kojoj se nalazi prozor sa koga je strela ispaljena. Iz druge jednačine je $14v_0 = 490$, pa je $v_0 = \frac{490}{14} = 35$ m/s. Konačno,

$$h_0 = 70 - v_0 + \frac{1}{2}g = 40\ m.$$

5.5. (a) Direktnim očitavanjem sa grafika vidimo da se po ceni od 1400 din može prodati 2000 komada proizvoda.

(b) Direktnim očitavanjem sa grafika vidimo da ukoliko želimo da prodamo bar 3000 komada proizvoda cena ne može biti veća od 1200 din.

(c) Direktnim očitavanjem sa grafika vidimo da je $f(1000) = 6000$ i da je $f(2000) = 1000$. Tako dobijamo sistem:

$$\frac{a}{1000 - b} = 6000 \quad \text{i} \quad \frac{a}{2000 - b} = 1000.$$

Odatle je:

$$a = 6000(1000 - b) = 6\,000\,000 - 6000b \quad \text{i} \quad a = 1000(2000 - b) = 2\,000\,000 - 1000b.$$

Izjednačavanjem po a dobijamo $6\,000\,000 - 6000b = 2\,000\,000 - 1000b$, odnosno, $4\,000\,000 = 5000b$, pa je $b = 800$. Ako ovu vrednost za b uvrstimo u bilo koju od dve početne jednačine, recimo u prvu, dobijamo $\dfrac{a}{200} = 6000$ pa je $a = 1\,200\,000$. Zato je $f(x) = \dfrac{1\,200\,000}{x - 800}$.

5.6. Ako se kompanija "Frula&Opanak Ltd" odluči za izgradnju sopstvenog pogona onda se troškovi proizvodnje n komada suvenira mogu opisati funkcijom

$$f(n) = 100\,000 + 4n.$$

S druge strane, ako se kompanija "Frula&Opanak Ltd" odluči da autsorsuje proizvodnju onda će n komada suvenira nabavljati po ceni koja se može opisati funkcijom

$$g(n) = 14n.$$

(a) Za 11 000 suvenira dobijamo:

$$f(11\,000) = 100\,000 + 4 \cdot 11\,000 = 144\,000$$
$$g(11\,000) = 14 \cdot 11\,000 = 154\,000.$$

Dakle, za 11 000 suvenira kompniji "Frula&Opanak Ltd" isplativije je da napravi sopstveni pogon.

(b) Za 8 000 suvenira dobijamo:

$$f(8\,000) = 100\,000 + 4 \cdot 8\,000 = 132\,000$$
$$g(8\,000) = 14 \cdot 8\,000 = 112\,000.$$

Dakle, za 8 000 suvenira kompniji "Frula&Opanak Ltd" isplativije je da autsorsuje proizvodnju.

(c) Treba da nađemo broj suvenira n za koga je $f(n) = g(n)$. Tako dobijamo jednačinu

$$100\,000 + 4n = 14n$$

čijim rešavanjem se dobija $n = 10\,000$.

5.7. (a) Uslov nam kaže da je $f(2) = 800$ (ako je $x = 2$ onda je $f(x) = 800$). Dakle, $\frac{c}{2} = 800$, pa je $c = 1600$.

(b) *Prvo rešenje.* Na osnovu uslova dobijamo da je $g(6) = 0$ i $g(10) = 400$. Prema tome, $6a + b = 0$ i $10a + b = 400$. Oduzimanjem prve jednačine od druge dobijamo $4a = 400$ pa je $a = 100$. Uvrštavanjem dobijene vrednosti za a u prvu jednačinu dobijamo $b = -600$.

Drugo rešenje. Sa grafika se vidi da prava koja odgovara funkciji ponude seče y-osu u tački -600. Kako u jednačini $y = ax + b$ broj b predstavlja odsečak na y-osi, odmah sledi da je $b = -600$. Sada iz uslova $g(6) = 0$ dobijamo $a = 100$.

(c) *Prvo rešenje.* Treba rešiti jednačinu:

$$\frac{1600}{x} = 100x - 600 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{16}{x} = x - 6 \quad \text{[nakon deljenja sa 100]}$$

Množenjem sa x i dovođenjem svih sabiraka na istu stranu znaka jednakosti jednačina postaje:

$$x^2 - 6x - 16 = 0,$$

a njena rešenja su:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2}.$$

Dakle, $x_1 = 8$ i $x_2 = -2$. Kako rešenje $x_2 = -2$ nema smisla (negativne cene ne postoje), traženo rešenje je $x = 8$.

Drugo rešenje. Ponuda je jednaka potražnji u onoj tački u kojoj se odgovarajuće krive seku. Sa grafika se vidi da se krive seku u tački $x = 8$, ali ćemo to za svaki slučaj da proverimo:

$$f(8) = \frac{1600}{8} = 200; \qquad g(8) = 100 \cdot 8 - 600 = 200.$$

Zaista, $x = 8$ je tačka u kojoj se krive seku, odnosno cena od 8 EUR/kom je cena koja uravnotežuje tržište.

6.1. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```python
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
  while True:
    n = int(input())
    if n >= p and n <= q: return n
    print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# Ubacuje element u listu koja sadrzi tri do sada najvece vrednosti
def Ubaci(x, m):
  if x > m[0]:           m[2], m[1], m[0] = m[1], m[0], x
  elif m[0] > x > m[1]: m[2], m[1] = m[1], x
  elif m[1] > x > m[2]: m[2] = x

# === Glavni program ===
print("Unesi duzinu niza (od 1 do 50): ", end="")
K = UcitajIzIntervala(1, 50)
# Ovde ce biti smesteni maksimumi tako da je m[0] > m[1] > m[2]
m = [-1, -1, -1]
for i in range(K):
  print("Unesi " + str(i+1) + ". broj (od 1 do 9999): ", end="")
  x = UcitajIzIntervala(1, 9999)
  Ubaci(x, m)
if m[2] == -1: print("U nizu ne postoje tri razlicita broja")
else: print(m[0], m[1], m[2])
```

6.2. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
  while True:
    n = int(input())
    if n >= p and n <= q: return n
    print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# Racuna zbir cifrara broja n
def ZbirCif(n):
  sum = 0
  while n > 0:
    sum += n%10
    n //= 10
  return sum

# === Glavni program ===
print("Unesi duzinu niza (od 1 do 50): ", end="")
K = UcitajIzIntervala(1, 50)
# Ovde ce biti smesteni elementi niza
a = []
for i in range(K):
  print("Unesi " + str(i+1) + ". broj (od 1 do 9999): ", end="")
  x = UcitajIzIntervala(1, 9999)
  a.append(x)
nasao_bar_jedan = False
for x in a:
  if ZbirCif(x) >= 10:
    print(x)
    nasao_bar_jedan = True
if not nasao_bar_jedan: print("Nema takvih brojeva")
```

6.3. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
  while True:
    n = int(input())
    if n >= p and n <= q: return n
    print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# Vraca listu svih cifara broja n
def SveCifreBroja(n):
  L = []
  while n > 0:
    L.append(n % 10)
    n //= 10
  L.reverse()
  return L

# === Glavni program ===
while True:
  print("Unesite petocifreni broj: ", end="")
  broj = UcitajIzIntervala(10000, 99999)
  sve_cifre = SveCifreBroja(broj)
  prosek = sum(sve_cifre) / len(sve_cifre)
  cifre = [x for x in sve_cifre if x > prosek]
  print(cifre)
  print("Da li zelite jos? [d/n]: ", end="")
  odgovor = input()
  if odgovor == "n" or odgovor == "N": break
```

6.4. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
  while True:
    n = int(input())
    if n >= p and n <= q: return n
    print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# Ucitava od korisnika prirodan broj.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese odgovarajucu vrednost.
def UcitajPrirodan():
  while True:
    n = int(input())
    if n >= 1: return n
    print("Greska: Nije prirodan broj! Ponovi unos!")

# Vraca prvu cifru broja n
def PrvaCifra(n):
  while n > 9: n //= 10
  return n

# === Glavni program ===
while True:
  print("Unesite broj izmedju 5 i 1000: ", end="")
  N = UcitajIzIntervala(5, 1000)
  L = []
  for i in range(N):
    print("Unesi " + str(i+1) + ". prirodan broj: ", end="")
    x = UcitajPrirodan()
    L.append(x)
  k = PrvaCifra(N)
  b = [x for x in L if x % k == 0]
  print(b)
  print("Da li zelite jos? [d/n]: ", end="")
  odgovor = input()
  if odgovor == "n" or odgovor == "N": break
```

6.5. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
  while True:
    n = int(input())
    if n >= p and n <= q: return n
    print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# === Glavni program ===
while True:
  print("Unesite broj izmedju 10 i 1000: ", end="")
  N = UcitajIzIntervala(10, 1000)
  L = []
  for i in range(N):
    print("Unesi " + str(i+1) + ". realan broj: ", end="")
    x = float(input())
    L.append(x)
  prosek = sum(L) / len(L)
  for i in range(N):
    if 2 * L[i] < prosek: L[i] = 0
  print(L)
  print("Da li zelite jos? [d/n]: ", end="")
  odgovor = input()
  if odgovor == "n" or odgovor == "N": break
```

6.6. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika prirodan broj.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese odgovarajucu vrednost.
def UcitajPrirodan():
  while True:
    n = int(input())
    if n >= 1: return n
    print("Greska: Nije prirodan broj! Ponovi unos!")

# Vraca listu svih cifara broja n
def SveCifreBroja(n):
  L = []
  while n > 0:
    L.append(n % 10)
    n //= 10
  L.reverse()
  return L

# === Glavni program ===
print("Unesite prirodan broj: ", end="")
N = UcitajPrirodan()
cifre = SveCifreBroja(N)
cifre3 = [c for c in cifre if c > 3]
if len(cifre3) < 2: print("Nema dve cifre vece od 3")
else: print(cifre3[1])
```

6.7. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
  while True:
    n = int(input())
    if n >= p and n <= q: return n
    print("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# Vraca prvu cifru broja n
def PrvaCifra(n):
  while n > 9: n //= 10
  return n

# === Glavni program ===
print("Unesite broj izmedju 1 i 50: ", end="")
N = UcitajIzIntervala(1, 50)
L = []
for i in range(N):
  print("Unesi " + str(i+1) + ". prirodan broj do 9999: ", end="")
  x = UcitajIzIntervala(1, 9999)
  L.append(x)
b = [x for x in L if PrvaCifra(x) == x % 10]
print(b)
```

6.8. Rešenje zadatka u programskom jeziku Python:

```
# Ucitava od korisnika broj koji je izmedju brojeva p i q.
# Program ne pusta korisnika dok ne unese vrednost iz opsega.
def UcitajIzIntervala(p, q):
     while True:
         n = int(input())
         if n >= p and n <= q: return n
         print ("Greska: Broj je izvan opsega! Ponovi unos!")

# === Glavni program ===
print ("Unesi duzinu niza (od 1 do 50): ", end="")
k = UcitajIzIntervala(1, 50)
L = []
for i in range(k):
     print ("Unesi " + str(i+1) + ". broj (od 1 do 9999): ", end="")
     x = UcitajIzIntervala(1, 9999)
     L.append(x)

print("Trocifreni brojevi koji su palindromi su: ")
for i in range (k):
     if L[i] > 99 and L[i] < 1000 and int(L[i]/100) == L[i]%10:
         # broj je trocifren i prva cifra je jednaka trecoj
         print(L[i])
```